Prüfung aus Mathematik 3 für MB, VT, WI

am 16. Jänner 2015

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f = u + iv : G \to \mathbb{C}$ analytisch. Beweisen Sie die beiden folgenden Aussagen:

   (a) Die Funktionen u und v erfüllen die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen
   $$u_x = v_y \qquad \text{und} \qquad u_y = -v_x.$$

   (b) Für jeden geschlossenen Integrationsweg C in G ist
   $$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

2. Auf dem Intervall $[-1, 1]$ sei die folgende Funktion gegeben
   $$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } -1 \leq x < 0, \\ 3 & \text{für } \quad 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

   (a) Bestimmen Sie die (gewöhnlichen) Fourierkoeffizienten a_0, a_n, b_n von h und geben Sie die Fourierreihe von h an.

   (b) Verwenden Sie die Parsevalsche Gleichung zur Bestimmung von
   $$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2.$$
   Welcher Wert ergibt sich daher für die Reihe
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots ?$$

   (c) Gegen welchen Wert konvergiert die Fourierreihe von h an $x = 0$?

3. (a) Es sei $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ integrierbar und $|y(t)| \leq ke^{ct}$ für $t \geq 0$ mit $k, c \in \mathbb{R}$ fest.
   Geben Sie die Definition der Laplacetransformierten $\mathcal{L}\{y\}$ von y an und verwenden Sie diese um zu zeigen, dass
   $$\mathcal{L}\{y'\}(s) = s\mathcal{L}\{y\} - y(0). \tag{1}$$
   Welche Formel ergibt sich durch Iteration von (1) für $\mathcal{L}\{y''\}$?

   (b) Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\,dt$ konvergent.
   Geben Sie die Definition der Fouriertransformierten $\mathcal{F}\{g\}$ von g an und verwenden Sie diese um zu zeigen, dass
   $$\mathcal{F}\{g'\}(s) = is\mathcal{F}\{g\}. \tag{2}$$
   Welche Formel ergibt sich durch Iteration von (2) für $\mathcal{F}\{g''\}$?

4. Bestimmen Sie für $0 \leq x \leq \pi$ und $t \geq 0$ eine Lösung des Randanfangswertproblems
   $$u_{tt} = u_{xx}, \qquad u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \qquad u(x, 0) = 1, \quad u_t(x, 0) = 17 + \cos(42x).$$