Prüfung aus Mathematik 3 für MB und VT

am 17. Jänner 2014

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. (a) Geben Sie die allgemeine Gestalt eines Sturm–Liouvilleschen Eigenwertproblems an. Welche Form hat das zugehörige innere Produkt auf dem Raum $C[a, b]$?
   (b) Beweisen Sie, dass die Eigenfunktionen verschiedener Eigenwerte eines Sturm–Liouvilleschen Eigenwertproblems orthogonal sind.

2. Auf dem Intervall $[-1, 1]$ sei die folgende Funktion gegeben
$$f(x) = |x|.$$
   (a) Setzen Sie f periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fort und entwickeln Sie diese Fortsetzung in eine gewöhnliche Fourierreihe.
   (b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Parsevalschen Gleichung den Wert der Reihe
$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2),$$
   wobei a_k und b_k die Fourierkoeffizienten aus (a) bezeichnen.
   (c) Formulieren Sie den Satz von Dirichlet.
   Gegen welchen Wert konvergiert die Fouriereihe aus (a) an $x = 17$?

3. Gegeben sei der Kegel
$$K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z^2,\ 0 \leq z \leq 1\},$$
   der Kegel*mantel*
$$M = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2,\ 0 \leq z \leq 1\}$$
   sowie das Vektorfeld
$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x + y \\ x + y \\ z^2 \end{pmatrix}.$$
   Berechnen Sie durch direkte Rechnung *oder* unter Verwendung geeigneter Integralsätze
$$\iint_M \operatorname{rot} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{O} \qquad \text{und} \qquad \iiint_K \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dx\, dy\, dz.$$

4. (a) Es seien $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie durch direktes Nachrechnen, dass die Funktion
$$u(x, t) = \frac{g(x - 4t) + g(x + 4t)}{2} + \frac{1}{8}\int_{x-4t}^{x+4t} h(s)\, ds$$
   die Gleichung
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
   und die Anfangsbedingungen $u(x, 0) = g(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x)$ erfüllt.
   (b) Bestimmen Sie die Funktion u aus (a) explizit für $g(x) = x^2$ und $h(x) = 2x$.