Prüfung aus Mathematik 3 für MB, VT, WI

am 20. Jänner 2017

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. In der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$ sei die mathematisch positiv durchlaufene Kreiskurve C mit Radius 4 und Mittelpunkt im Ursprung gegeben.

   (a) Bestimmen Sie das Kurvenintegral
   $$\int_C \overline{z}\, dz$$
   und begründen Sie mit Ihrem Ergebnis und einem geeigneten Satz aus der Vorlesung, warum die Funktion $g(z) = \overline{z}$ auf dem von C berandeten Bereich *nicht* analytisch ist.

   (b) Formulieren Sie den Residuensatz und bestimmen Sie mit dessen Hilfe das Integral
   $$\int_C \frac{e^{z/2}}{1+e^z}\, dz.$$

2. (a) Geben Sie die allgemeine Gestalt eines Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblems an. Welche Form hat das zugehörige innere Produkt auf dem Raum $C[a,b]$?

   (b) Zeigen Sie, dass die Eigenfunktionen verschiedener Eigenwerte eines Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblems orthogonal sind.

3. Gegeben sei eine integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deren Laplace- und Fouriertransformierte existieren.

   (a) Geben Sie die Definition der Laplacetransformierten $\mathcal{L}\{f\}$ und der Fouriertransformierten $\mathcal{F}\{f\}$ von f an.

   (b) Zeigen Sie, dass
   $$\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = -\mathcal{L}\{tf(t)\}(s) \qquad \text{und} \qquad \mathcal{F}\{f'\}(s) = is\mathcal{F}\{f\}(s).$$

   (c) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte der Funktion
   $$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| > 1, \\ -1 & \text{für } -1 \leq x \leq 0, \\ 1 & \text{für } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

4. (a) Es seien $a, b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig partiell differenzierbar. Zeigen Sie, dass eine Lösung der Differentialgleichung
   $$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0$$
   auf jeder Charakteristik der Differentialgleichung konstant ist.

   (b) Bestimmen Sie eine Lösung der Differentialgleichung
   $$yu_x - u_y = 0, \qquad u(x,0) = x^2.$$