**Prüfung aus Mathematik 3 für MB und VT**

**am 26. November 2010**

ZUNAME: ........................

Vorname: ........................

Kennzahl: ........................

Mat.Nr.: ........................

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. Gegeben sei ein Vektorraum $\mathcal{V}$ mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ und dadurch induzierter Norm $\|\cdot\|$, sowie ein System von paarweise orthonormalen Elementen $\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \ldots$
   Zeigen Sie, dass für $m \in \mathbb{N}$, $d_1, \ldots, d_m \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathcal{V}$ stets
   $$\|f - (c_1\varphi_1 + \ldots + c_m\varphi_m)\| \leq \|f - (d_1\varphi_1 + \ldots + d_m\varphi_m)\|,$$
   wenn
   $$c_k = \langle f, \varphi_k \rangle, \qquad k = 1, \ldots, m.$$

2. Bestimmen Sie die *allgemeine* Lösung von
   $$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ e^t \end{pmatrix}.$$

3. (a) Formulieren Sie den Integralsatz von Stokes.
   (b) Berechnen Sie unter Verwendung eines geeigneten Integralsatzes
   $$\int_C \boldsymbol{u}\, d\boldsymbol{x},$$
   wobei $C$ die Randkurve des durch die Geraden $y = 2x$, $y = x$ und $x = \pi$ begrenzten Dreiecks bezeichnet und das Vektorfeld $\boldsymbol{u}$ gegeben ist durch
   $$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \cos y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. (a) Bestimmen Sie durch Separationsansatz für $0 \leq x \leq 2$ und $t \geq 0$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung
   $$u_{tt} = u_{xx}, \qquad u(0,t) = u_x(2,t) = 0.$$
   (b) Erklären Sie wie prinzipiell ein Anpassen Ihrer Lösung aus (a) an Anfangsbedingungen
   $$u(x,0) = g(x), \qquad u_t(x,0) = h(x)$$
   möglich wäre.