Prüfung aus Mathematik 3 für MB, VT, WI

am 3. März 2017

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. (a) In der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$ seien die Kurven γ_1 und γ_2 gegeben durch die folgenden Parametrisierungen:

$$\gamma_1(t) = 1 + 2it, \qquad \gamma_2(t) = e^{2\pi i t}, \qquad 0 \le t \le 1.$$

Skizzieren Sie die Kurven γ_1 und γ_2 und bestimmen Sie die folgenden Kurvenintegrale:

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\, dz \qquad \text{und} \qquad \int_{\gamma_2} \overline{z}\, dz.$$

(b) Formulieren Sie den Residuensatz und begründen Sie, warum er für die Berechnung der Kurvenintegrale in (a) nicht angewendet werden kann.

2. Auf $C[-1,1]$ sei das folgende innere Produkt gegeben

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x)\, dx.$$

(a) Entscheiden Sie, ob die Funktionen $\phi(x) = 3x$ und $\psi(x) = 5x^2 - 3$ orthogonal sind.

(b) Finden Sie Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$, die nicht beide Null sind, sodass die Funktion

$$h(x) = ax^3 + bx$$

orthogonal auf den von $\{\phi, \psi\}$ aufgespannten Unterraum steht.

(c) Finden Sie Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sodass für $\zeta(x) = x - 5$ das Abstandsquadrat

$$\|\alpha\varphi + \beta\psi - \zeta\|^2$$

minimal wird.

3. Verwenden Sie die Laplacetransformation zur Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(t) + y(t) = t, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1.$$

4. Bestimmen Sie für $0 \le r \le 3$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ eine Lösung des Dirichletschen Randwertproblems

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0, \qquad u(3, \varphi) = \frac{15}{2} + \cos^2 \varphi.$$

Hinweis: $\cos^2 \varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\varphi)$