**Prüfung aus Mathematik 3 für MB, VT, WI**

**am 3. Mai 2019**

ZUNAME: ........................

Vorname: ........................

Mat.Nr.: ........................

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. (a) Bestimmen Sie die Residuen der folgenden Funktion an ihren Polstellen:

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 2iz + 3}.$$

(b) Es bezeichne $S_R$ den mathematisch positiv durchlaufenen Halbkreisbogen in der oberen Halbebene mit Radius $R$ und Mittelpunkt 0. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{1}{z^2 + 2iz + 3}\, dz = 0.$$

(c) Formulieren Sie den Residuensatz und verwenden Sie ihn, sowie die Ergebnisse aus (a) und (b) zur Bestimmung von

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2ix + 3}\, dx.$$

2. Auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ sei die folgende Funktion gegeben

$$f(x) = \pi - |x|.$$

Skizzieren Sie die Funktion $f$ und bestimmen Sie die (gewöhnliche) Fourierreihe von $f$.

3. (a) Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\, dt$ konvergent.
Geben Sie die Definition der Fouriertransformierten $\mathcal{F}\{g\}$ von $g$ an und verwenden Sie diese um zu zeigen, dass

$$\mathcal{F}\{g'\}(s) = is\mathcal{F}\{g\}. \tag{1}$$

Welche Formel ergibt sich durch Iteration von (1) für $\mathcal{F}\{g''\}$?

(b) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte $\mathcal{F}\{g\}$ der Funktion

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } -4 \le x \le 4, \\ 0 & \text{für } |x| > 4 \end{cases}$$

und anschließend den Grenzwert $\lim_{s\to 0} \mathcal{F}\{g\}(s)$.

4. Für $0 \le x \le 1$, $t \ge 0$ seien $u_1(x,t)$ und $u_2(x,t)$ Lösungen des Rand-Anfangswertproblems

$$u_{tt} = u_{xx}, \qquad u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad u(x,0) = \sin(\pi x),\ u_t(x,0) = 0. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass dann $u_1 = u_2$ gelten muss, also die Lösung von (2) eindeutig ist.

Hinweis: Es gibt KEINE PUNKTE, wenn Sie mit Hilfe des Separationsansatzes oder der Lösungsformel von d'Alembert eine Lösung von (2) bestimmen.