**Prüfung aus Mathematik 3 für MB, VT, WI**

**am 4. Dezember 2015**

ZUNAME: ........................

Vorname: ........................

Mat.Nr.: ........................

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. (a) In der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$ seien die Kurven $\gamma_1$ und $\gamma_2$ gegeben durch die folgenden Parametrisierungen:

$$\gamma_1(t) = 2 + 3it, \qquad \gamma_2(t) = e^{2\pi it}, \qquad 0 \le t \le 1.$$

Skizzieren Sie die Kurven $\gamma_1$ und $\gamma_2$ und bestimmen Sie die folgenden Kurvenintegrale:

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\, dz \qquad \text{und} \qquad \int_{\gamma_2} \overline{z}\, dz.$$

(b) Formulieren Sie den Residuensatz und begründen Sie, warum er für die Berechnung der Kurvenintegrale in (a) nicht angewendet werden kann.

2. (a) Für $k \ge 1$ sind die (gewöhnlichen) Fourierkoeffizienten $a_k$, $b_k$, der auf $[-\pi, \pi]$ definierten Funktion

$$f(x) = \pi - |x|,$$

gegeben durch

$$a_k = \frac{2}{\pi}\,\frac{1-(-1)^k}{k^2} \qquad \text{und} \qquad b_k = 0.$$

Skizzieren Sie $f$, bestimmen Sie den Fourierkoeffizienten $a_0$ und geben Sie die Fourierreihe von $f$ an. Gegen welchen Wert konvergiert die Fourierreihe von $f$ an $x = 17\pi$?

(b) Zwei Eigenwerte des Sturm-Liouvilleschen Randwertproblems

$$y''(x) + \lambda\, y(x) = 0, \qquad y(0) = y'(1) = 0,$$

sind gegeben durch $\frac{\pi^2}{4}$ und $\frac{17^2\pi^2}{4}$.

Bestimmen Sie zu $\frac{\pi^2}{4}$ und $\frac{17^2\pi^2}{4}$ gehörige Eigenfunktionen und geben Sie ein Skalarprodukt auf $C([0,1])$ an, bezüglich dem diese Funktionen orthogonal sind.

3. (a) Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\, dt$ konvergent.

Geben Sie die Definition der Fouriertransformierten $\mathcal{F}\{g\}$ von $g$ an und verwenden Sie diese um zu zeigen, dass

$$\mathcal{F}\{g'\}(s) = is\mathcal{F}\{g\}.$$

(b) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte der Funktion

$$g(x) = \max\{0, 1 - |x|\}.$$

4. (a) Es seien $a, b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig partiell differenzierbar. Zeigen Sie, dass eine Lösung der Differentialgleichung

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0$$

auf jeder Charakteristik der Differentialgleichung konstant ist.

(b) Bestimmen und skizzieren Sie die Charakteristiken der Differentialgleichung

$$xu_x + 2yu_y = 0.$$

Ermitteln Sie außerdem eine Lösung, die der Bedingung $u(x,1) = x^2$ genügt.