Prüfung aus Mathematik 3 für MB, VT, WI

am 5. Dezember 2014

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. Gegeben sei ein Vektorraum $\mathcal{V}$ mit Skalarprodukt $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ und dadurch induzierter Norm $\|\cdot\|$, sowie ein System von paarweise orthonormalen Elementen $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$.
   Zeigen Sie, dass für $d_1,\ldots,d_m \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathcal{V}$ stets
   $$\|f-(c_1\varphi_1+\cdots+c_m\varphi_m)\| \le \|f-(d_1\varphi_1+\cdots+d_m\varphi_m)\|,$$
   wenn
   $$c_k = \langle f,\varphi_k\rangle, \qquad k=1,\ldots,m.$$

2. (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Randwertproblems
   $$y''+\omega^2\,y=0, \qquad y'(0)=y'(1)=0.$$
   Hinweis: Es ist $\omega^2 \ge 0$.

   (b) Entwickeln Sie die auf $[0,1]$ definierte Funktion
   $$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{für } 0\le x\le \frac{1}{2} \\ 1 & \text{für } \frac{1}{2}<x\le 1 \end{cases}$$
   in eine Fourierreihe bezüglich der Eigenfunktionen des Randwertproblems aus (a).
   Gegen welchen Wert konvergiert die Fourierreihe von f an $x=\frac{1}{2}$?

3. Gegeben sei der Kegel
   $$K=\{(x,y,z): x^2+y^2\le z^2,\ 0\le z\le 1\},$$
   der Kegel*mantel*
   $$M=\{(x,y,z): x^2+y^2=z^2,\ 0\le z\le 1\}$$
   sowie das Vektorfeld
   $$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} x+y \\ x+y \\ z^2 \end{pmatrix}.$$
   Berechnen Sie *unter Verwendung geeigneter Integralsätze* (nicht durch direkte Berechnung!)
   $$\iint_M \operatorname{rot}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{O} \qquad \text{und} \qquad \iiint_K \operatorname{div}\boldsymbol{v}\,dx\,dy\,dz.$$

4. Gegeben sei die eindimensionale, beidseitig unbeschränkte Schwingungsgleichung
   $$u_{tt}=4u_{xx}, \qquad u(x,0)=f(x), \quad u_t(x,0)=g(x). \tag{1}$$
   Verwenden Sie die Koordinatentransformation
   $$X=x+2t \qquad \text{und} \qquad T=x-2t$$
   zur **Herleitung** der D'Alembertschen Lösungsformel für (1):
   $$u(x,t)=\frac{1}{2}(f(x-2t)+f(x+2t))+\frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} g(s)\,ds.$$