Prüfung aus Mathematik 3 für MB, VT, WI

am 5. Mai 2017

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f = u + iv : G \to \mathbb{C}$ analytisch. Beweisen Sie die beiden folgenden Aussagen:

   (a) Die Funktionen u und v erfüllen die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen
   $$u_x = v_y \qquad \text{und} \qquad u_y = -v_x.$$

   (b) Für jeden geschlossenen Integrationsweg C in G ist
   $$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

2. Auf dem Intervall $[-1, 1]$ sei die folgende Funktion gegeben
   $$f(x) = |x|.$$

   (a) Setzen Sie f periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fort und entwickeln Sie diese Fortsetzung in eine gewöhnliche Fourierreihe.

   (b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Parsevalschen Gleichung den Wert der Reihe
   $$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2),$$
   wobei a_k und b_k die Fourierkoeffizienten aus (a) bezeichnen.

   (c) Formulieren Sie den Satz von Dirichlet.
   Gegen welchen Wert konvergiert die Fouriereihe aus (a) an $x = 17$?

3. (a) Es sei $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ integrierbar und $|y(t)| \le ke^{ct}$ für $t \ge 0$ mit $k, c \in \mathbb{R}$ fest.
   Geben Sie die Definition der Laplacetransformierten $\mathcal{L}\{y\}$ von y an und verwenden Sie diese um zu zeigen, dass
   $$\mathcal{L}\{y'\}(s) = s\mathcal{L}\{y\} - y(0). \tag{1}$$
   Welche Formel ergibt sich durch Iteration von (1) für $\mathcal{L}\{y''\}$?

   (b) Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\,dt$ konvergent.
   Geben Sie die Definition der Fouriertransformierten $\mathcal{F}\{g\}$ von g an und verwenden Sie diese um zu zeigen, dass
   $$\mathcal{F}\{g'\}(s) = is\mathcal{F}\{g\}. \tag{2}$$
   Welche Formel ergibt sich durch Iteration von (2) für $\mathcal{F}\{g''\}$?

4. Für $0 \le x \le 1$, $t \ge 0$ seien $u_1(x,t)$ und $u_2(x,t)$ Lösungen des Rand-Anfangswertproblems
   $$u_{tt} = u_{xx}, \qquad u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad u(x,0) = \sin(\pi x),\ u_t(x,0) = 0. \tag{3}$$
   Zeigen Sie, dass dann $u_1 = u_2$ gelten muss, also die Lösung von (3) eindeutig ist.
   Hinweis: Es gibt KEINE PUNKTE, wenn Sie mit Hilfe des Separationsansatzes oder der Lösungsformel von d'Alembert eine Lösung von (3) bestimmen.