Prüfung aus Mathematik 3 für MB, VT, WI

am 6. März 2015

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. (a) Formulieren Sie *ausführlich* den Residuensatz.

   (b) Bestimmen Sie die Residuen der folgenden Funktion an ihren Polstellen:

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2 + \pi^2}.$$

   (c) Es seien C_1 und C_2 mathematisch positiv durchlaufene Kreiskurven in der komplexen Zahlenebene mit Radius 4. Der Mittelpunkt von C_1 sei der Ursprung und der Mittelpunkt von C_2 sei $-3i$. Bestimmen Sie für die Funktion f aus (b) den Wert der Integrale

$$\int_{C_1} f(z)\,dz \qquad \text{und} \qquad \int_{C_2} f(z)\,dz.$$

2. (a) Geben Sie die allgemeine Gestalt eines Sturm–Liouvilleschen Eigenwertproblems an. Welche Form hat das zugehörige innere Produkt auf dem Raum $C[a, b]$?

   (b) Beweisen Sie, dass die Eigenfunktionen verschiedener Eigenwerte eines Sturm–Liouvilleschen Eigenwertproblems orthogonal sind.

3. (a) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem mit Hilfe der Laplacetransformation:

$$y''(t) - y(t) = 17, \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

   (b) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte $\mathcal{F}\{g\}$ der Funktion

$$g(x) = \begin{cases} 3 & \text{für } -7 \le x \le 7, \\ 0 & \text{für } |x| > 7 \end{cases}$$

   und anschließend den Grenzwert $\lim_{s\to 0} \mathcal{F}\{g\}(s)$.

4. (a) Es seien $a, b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig partiell differenzierbar. Zeigen Sie, dass eine Lösung der Differentialgleichung

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = 0$$

   auf jeder Charakteristik der Differentialgleichung konstant ist.

   (b) Bestimmen und skizzieren Sie die Charakteristiken der Differentialgleichung

$$yu_x - xu_y = 0.$$

   Ermitteln Sie außerdem eine Lösung, die der Bedingung $u(0, y) = y^4$ genügt.