Prüfung aus Mathematik 3 für MB, VT, WI

am 9. Oktober 2015

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. (a) Erklären Sie den Begriff des Residuums einer analytischen Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ an einer Stelle $p \in \mathbb{C}$ und formulieren Sie den Residuensatz.

   (b) Sei C die mathematisch positiv durchlaufene Kreiskurve mit Radius 1 und Mittelpunkt 0. Bestimmen Sie mit Hilfe des Residuensatzes die Kurvenintegrale

$$\int_C \frac{e^z}{\sin z}\, dz \qquad \text{und} \qquad \int_C \frac{1+z}{1-e^z}\, dz.$$

2. Gegeben sei ein Vektorraum $\mathcal{V}$ mit Skalarprodukt $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$ und dadurch induzierter Norm $\|\cdot\|$, sowie ein System von paarweise orthonormalen Elementen $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$.
   Zeigen Sie, dass für $d_1, \ldots, d_m \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathcal{V}$ stets

$$\|f - (c_1\varphi_1 + \cdots + c_m\varphi_m)\| \le \|f - (d_1\varphi_1 + \cdots + d_m\varphi_m)\|,$$

   wenn

$$c_k = \langle f, \varphi_k \rangle, \qquad k = 1, \ldots, m.$$

3. (a) Geben Sie die Definition der Laplacetransformation an und verwenden Sie diese Integraltransformation zur Bestimmung einer Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) - y(t) = e^t, \qquad y(0) = 17.$$

   (b) Geben Sie die Lösungsformel von D'Alembert für die beidseitig unbeschränkte Schwingungsgleichung der folgenden Form an:

$$u_{tt} = 16u_{xx}, \qquad u(x,0) = g(x), \quad u_t(x,0) = h(x).$$

   Bestimmen Sie speziell für

$$g(x) = \sin x \qquad \text{und} \qquad h(x) = \cos x$$

   die Lösung dieses Problems explizit.

4. Bestimmen Sie für $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ eine Lösung des Dirichletschen Randwertproblems

$$r^2\, u_{rr} + r\, u_r + u_{\varphi\varphi} = 0, \qquad u(1,\varphi) = 17 + \cos(42\varphi).$$