Prüfung aus Mathematik 3 für MB, VT, WI

am 9. Mai 2014

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. Auf $C[-1,1]$ sei das gewöhnliche innere Produkt gegeben

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx.$$

   (a) Entscheiden Sie, ob die Funktionen $f(x) = x^3$ und $g(x) = x^2 + 1$

   ◯ orthogonal sind; ◯ linear abhängig sind;

   ◯ orthonormal sind; ◯ $\|f\| \leq \|g\|$ erfüllen.

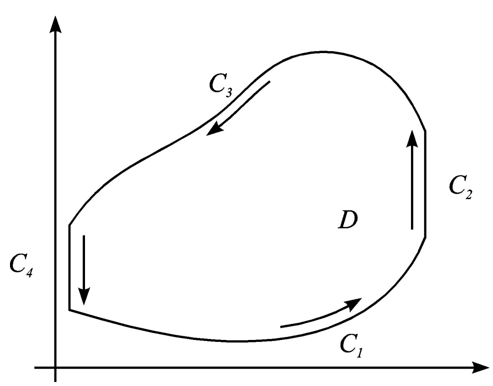
   (b) Bestimmen Sie Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$, die nicht alle Null sind, sodass $h(x) = ax^2 + b$ orthogonal auf den von $\{f, g\}$ aufgespannten Unterraum steht.

2. Ist $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und C eine einfach geschlossene Kurve mit einer stetig differenzierbaren Parameterdarstellung, die im mathematisch positiven Sinn durchlaufen wird, dann gilt nach dem Satz von Green für den von ihr berandeten Bereich D

$$\int_C \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} d\boldsymbol{x} = -\iint_D \frac{\partial u}{\partial y}\, dx\, dy.$$

   Beweisen Sie diese Formel für die abgebildete Kurve $C = C_1 \cup \cdots \cup C_4$ durch *direktes Nachrechnen*.

   Formulieren Sie den Satz von Green auch allgemein!



3. (a) Beweisen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen für eine stetig differenzierbare Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

   (i) Die Funktion u ist Lösung von $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0$.

   (ii) $u(\boldsymbol{x}(t))$ ist für jede Charakteristik $\boldsymbol{x}(t)$ von $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0$ konstant.

   Erklären Sie insbesondere den Begriff der Charakteristik einer Differentialgleichung der Form $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0$.

   (b) Bestimmen Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$xu_x + 2yu_y = 0,$$

   die $u(x,1) = x^2$ erfüllt.

4. Bestimmen Sie für $0 \leq r \leq 1$ und $0 \leq \varphi \leq \pi$ eine Lösung des Dirichletschen Randwertproblems

$$r^2\, u_{rr} + r\, u_r + u_{\varphi\varphi} = 0, \qquad u(r,0) = u(r,\pi) = 0, \qquad u(1,\varphi) = \sin\varphi.$$