Prüfung aus Mathematik 3 für MB und VT

am 15. Jänner 2010

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. (a) Geben Sie die allgemeine Form eines Sturm–Liouvilleschen Eigenwertproblems an.

   (b) Erklären Sie den Zusammenhang von Sturm–Liouvilleschen Eigenwertproblemen mit (abstrakten) Fourierreihen.

   (c) Lösen Sie das folgende Sturm–Liouvillesche Eigenwertproblem:

   $$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(2) = 0.$$

   Wie lauten die Orthogonalitätsrelationen der Eigenfunktionen?

2. (a) Erklären Sie die Begriffe Stabilität und asymptotische Stabilität der Lösungen eines Differentialgleichungssystems mit konstanten Koeffizienten.

   (b) Lösen Sie das folgende Differentialgleichungssystem:

   $$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + 3y \\ \dot{y} &= 4x + 3y, \end{aligned}$$

   Sind die Lösungen des Differentialgleichungssystems instabil, stabil oder asymptotisch stabil?

3. (a) Formulieren Sie den Integralsatz von Gauß.

   (b) Es sei $g(x, y, z) = xy + xz + yz$ und S bezeichne die Sphäre mit Radius 17 und Mittelpunkt im Ursprung. Berechnen Sie unter Verwendung eines geeigneten Integralsatzes

   $$\iint\limits_S \operatorname{grad} g \, d\boldsymbol{O}.$$

4. (a) Erklären Sie den Begriff der Charakteristik einer Differentialgleichung der Form

   $$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = 0 \tag{1}$$

   und beschreiben Sie (allgemein) die Vorgangsweise zur Ermittlung einer Lösung von (1).

   (b) Bestimmen Sie eine möglichst allgemeine Lösung der Differentialgleichung

   $$2yu_x + 3u_y = 0.$$