Prüfung aus Mathematik (2) ALT für BI

am 14. 5. 2004

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

Zuname: ....
Vorname: ....
Kennzahl / Mat.Nr.: ....

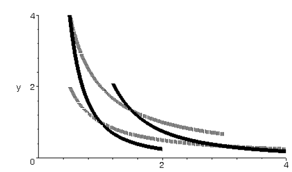
1.) a) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y^{(4)} - y = 0$, $y(0) = y'(0) = 1$, $y''(0) = y'''(0) = -1$ und zeichnen Sie das Phasenbild, also den Funktionszusammenhang zwischen y' und y (dabei ist y' auf der senkrechten und y auf der waagrechten Achse aufzutragen). Wie lautet die Begleitmatrix des zugehörigen Differentialgleichungssystems?

b) Wie lautet der *<u>Ansatz</u>* für eine Partikulärlösung der inhomogenen DG $y^{(4)} - y = x + x\cosh x$?

2.) Lösen Sie die autonome Differentialgleichung $y'' = \dfrac{1}{y}\, y'^2 \sqrt{1 + y'^2}$ und bestimmen Sie diejenige (monoton steigende) Lösungskurve, die durch den Punkt $(0, -1)$ geht und dort senkrechte Tangente hat.

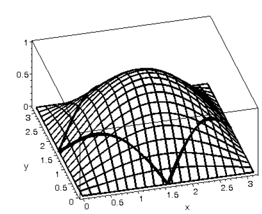
Hinweis zur Kontrolle: Die Kurve liegt im vierten Quadranten und ist gegeben durch $x = x(y) = \dfrac{1}{4}(y^2 - 1) - \dfrac{1}{2}\ln(-y)$. Eine Auflösung nach y ist nicht möglich.

3.) Berechnen Sie den Flächeninhalt des von den vier Kurven $xy = 1$, $xy = 2$, $x^2y = 1$, $x^2y = 3$ eingeschlossenen Bereichs im ersten Quadranten mit Hilfe der Substitutionsregel für Doppelintegrale. Schreiben Sie diese Regel allgemein an.



4.) Welche Punkte der Fläche $z = z(x, y) = \sin x \,\sin y$ sind parabolisch? Bestimmen Sie alle Extremstellen. Geben Sie den Bereich innerhalb des Quadrats $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$ an, der aus elliptischen Stellen besteht, und bestimmen Sie das Schmiegparaboloid zweiter Ordnung an der Extremstelle $(x_0, y_0) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Hinweis zur Kontrolle: Die parabolischen Punkte liegen auf den Flächenkurven über den Geraden $x - y = (m + \frac{1}{2})\pi$, $x + y = (n + \frac{1}{2})\pi$ $(m, n \in \boldsymbol{Z})$.



5.) Die Funktionen $\varphi_{kj} = \dfrac{4}{\pi^2} \sin kx \,\sin jy$ $(k, j \in \{1, 2, \ldots\}$ bilden bezüglich des Skalarprodukts $\langle g, h\rangle = \displaystyle\int_0^\pi \int_0^\pi g(x, y)h(x, y)\, dx\, dy$ ein vollständiges Orthonormalsystem auf dem Quadrat $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$ (braucht nicht nachgerechnet zu werden). Berechnen Sie die Koeffizienten c_{kj} der Fourierentwicklung von $f(x, y) = 1 = \text{const}$ nach diesem Funktionensystem. Geben Sie das Randwertproblem an, welches die φ_{kj} als Eigenfunktionen hat.

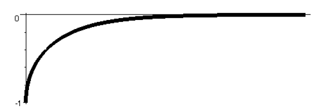
Prüfung aus Mathematik (2) NEU für BI
am 14. 5. 2004
Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

Zuname: ....
Vorname: ....
Kennzahl / Mat.Nr.: ....

1.) a) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y^{(4)} - y = 0$, $y(0) = y'(0) = 1$, $y''(0) = y'''(0) = -1$ und zeichnen Sie das Phasenbild, also den Funktionszusammenhang zwischen y' und y (dabei ist y' auf der senkrechten und y auf der waagrechten Achse aufzutragen). Wie lautet die Begleitmatrix des zugehörigen Differentialgleichungssystems?

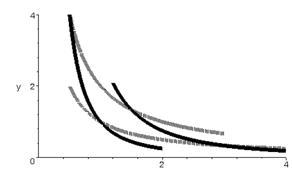
b) Wie lautet der *Ansatz* für eine Partikulärlösung der inhomogenen DG $y^{(4)} - y = x + x\cosh x$?

2.) Lösen Sie die autonome Differentialgleichung $y'' = \dfrac{1}{y} y'^2 \sqrt{1 + y'^2}$ und bestimmen Sie diejenige (monoton steigende) Lösungskurve, die durch den Punkt $(0, -1)$ geht und dort senkrechte Tangente hat.



Hinweis zur Kontrolle: Die Kurve liegt im vierten Quadranten und ist gegeben durch $x = x(y) = \dfrac{1}{4}(y^2 - 1) - \dfrac{1}{2}\ln(-y)$. Eine Auflösung nach y ist nicht möglich.

3.) Berechnen Sie den Flächeninhalt des von den vier Kurven $xy = 1$, $xy = 2$, $x^2y=1$, $x^2y=3$ eingeschlossenen Bereichs im ersten Quadranten mit Hilfe der Substitutionsregel für Doppelintegrale. Schreiben Sie diese Regel allgemein an.



4.) a) Prüfen Sie nach, dass durch $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi^2}(1 + \sin(x+y)) & \ldots \text{ falls } -\pi \le x \le \pi,\ -\pi \le y \le \pi, \\ 0 & \ldots \text{ sonst} \end{cases}$
eine Dichte gegeben ist. Da f offenbar nichtnegativ ist, bleibt nachzurechnen, dass auf dem angegebenen Quadrat das Volumen unter dem Funktionsgebirge $z = f(x,y)$ gleich 1 ist.

b) Wie man leicht sieht, liegt das Mittel $(\xi, \eta) = (\mathrm{E}x, \mathrm{E}y)$ der Verteilung im Ursprung (nicht nachprüfen). Bestätigen Sie, dass die Kovarianz V_{xy} der Verteilung verschwindet. Benützen Sie dazu die Formel $V_{xy} = \mathrm{E}xy - \mathrm{E}x\mathrm{E}y$.

c) Sind die Variablen x, y unabhängig?

5.) Die Funktionen $\varphi_{kj} = \dfrac{4}{\pi^2} \sin kx \sin jy$ $(k, j \in \{1, 2, \ldots\}$ bilden bezüglich des Skalarprodukts $\langle g, h\rangle = \displaystyle\int_0^\pi\int_0^\pi g(x,y)h(x,y)\,dx\,dy$ ein vollständiges Orthonormalsystem auf dem Quadrat $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$ (braucht nicht nachgerechnet zu werden). Berechnen Sie die Koeffizienten c_{kj} der Fourierentwicklung von $f(x,y) = 1 = \text{const}$ nach diesem Funktionensystem. Geben Sie das Randwertproblem an, welches die φ_{kj} als Eigenfunktionen hat.