Prüfung aus Mathematik (2) ALT für BI
am 15. 10. 2004
Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

Zuname: ....
Vorname: ....
Kennzahl / Mat.Nr.: ....

1.) a) Die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ lauten $-1, 2, 2$ (Nicht nachrechnen).

Wieso kann man ohne Rechnung vorhersagen, dass drei paarweise orthogonale (und damit jedenfalls unabhängige) Eigenvektoren existieren? Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ unter Verwendung eines Orthogonalsystems von Eigenvektoren.

b) Wie lautet der *Ansatz* für eine Partikulärlösung des Systems $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{r}\cos 2t + \boldsymbol{s}\,\mathrm{e}^{2t}$, wobei $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{R}^3$ konstante Spaltenvektoren sind.

2.) Bestimmen Sie die auf dem Intervall $[0, 1]$ monoton wachsende Lösung $y(x)$ der autonomen Differentialgleichung $-\dfrac{y''}{\sqrt{1+y'^2}^3} = y$
mit RB1: $x = 0 \Leftrightarrow y = 0$, RB2: $y = 1 \Leftrightarrow y' = 0$.
Hinweis: Die Lösung kann nur in der Form $x = x(y) = \displaystyle\int_{y=0}^{\eta} f(\eta)\,d\eta$ dargestellt werden.

3.) a) Ein Paraboloid sei gegeben durch $z = ax^2 + 2bxy + cy^2 + kx + my + n$, wobei a, b, c, k, m, n reelle Konstanten mit $a > 0$, $ac - b^2 > 0$ sind. Bestätigen Sie, dass alle Punkte einer solchen Fläche elliptisch sind (daher die Bezeichnung elliptisches Paraboloid).

b) Bestimmen Sie die Richtung des steilsten Anstiegs und den Anstiegswinkel im Punkt $(0, 0, 1)$ des elliptischen Paraboloids $z = x^2 - 2xy + 2y^2 + x - y + 1$ sowie die Gleichung der Tangentialebene in diesem Punkt.

4.) a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment einer Vollkugel mit Radius R bezüglich einer Schwerachse einmal unter Heranziehung der Substitutionsregel für Dreifachintegrale und dann durch Schichtenintegration (Hinweis zur Kontrolle: Es ergibt sich $\frac{8}{15}R^5\pi$).

b) Berechnen Sie unter Verwendung des Resultats aus a) das Trägheitsmoment derselben Kugel bezüglich einer Achse, welche die Kugel berührt (Hinweis: das Kugelvolumen beträgt $\frac{4}{3}R^3\pi$).

5.) Bestimmen Sie die stationäre Temperaturverteilung $u(r, \varphi)$ in einer kreisförmigen, an Ober- und Unterseite isolierten Platte mit Radius 1, deren Rand auf der Temperatur $u(1, \varphi) = f(\varphi) = \varphi$ $(-\pi < \varphi < \pi)$ gehalten wird (Hinweis zur Kontrolle: Die Koeffizienten der Fourierreihe für $f(\varphi)$ lauten $b_k = 2\frac{(-1)^{k+1}}{k}$).

Prüfung aus Mathematik (2) NEU für BI
am 15. 10. 2004
Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

Zuname: ....
Vorname: ....
Kennzahl / Mat.Nr.: ....

1.) a) Die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ lauten $-1, 2, 2$ (Nicht nachrechnen).

Wieso kann man ohne Rechnung vorhersagen, dass drei paarweise orthogonale (und damit jedenfalls unabhängige) Eigenvektoren existieren? Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ unter Verwendung eines <u>Orthogonal</u>systems von Eigenvektoren.

b) Wie lautet der <u>*Ansatz*</u> für eine Partikulärlösung des Systems $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{r}\cos 2t + \boldsymbol{s}\,\mathrm{e}^{2t}$, wobei $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{R}^3$ konstante Spaltenvektoren sind.

2.) Bestimmen Sie die auf dem Intervall $[0, 1]$ monoton wachsende Lösung $y(x)$ der autonomen Differentialgleichung $-\dfrac{y''}{\sqrt{1+y'^2}^3} = y$ mit RB1: $x = 0 \Leftrightarrow y = 0$, RB2: $y = 1 \Leftrightarrow y' = 0$.
Hinweis: Die Lösung kann nur in der Form $x = x(y) = \displaystyle\int_{y=0}^{\eta} f(\eta)\, d\eta$ dargestellt werden.

3.) a) Ein Paraboloid sei gegeben durch $z = ax^2 + 2bxy + cy^2 + kx + my + n$, wobei a, b, c, k, m, n reelle Konstanten mit $a > 0$, $ac - b^2 > 0$ sind. Bestätigen Sie, dass alle Punkte einer solchen Fläche elliptisch sind (daher die Bezeichnung elliptisches Paraboloid).

b) Bestimmen Sie die Richtung des steilsten Anstiegs und den Anstiegswinkel im Punkt $(0, 0, 1)$ des elliptischen Paraboloids $z = x^2 - 2xy + 2y^2 + x - y + 1$ sowie die Gleichung der Tangentialebene in diesem Punkt.

4.) a) Von einer Messgröße ist bekannt, dass sie normalverteilt ist mit unbekanntem Mittel μ und bekannter Varianz $\sigma^2 = 4$. Man macht 100 unabhängige Beobachtungen, als deren empirisches Mittel sich $\xi = 10$ ergibt. Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall $[\xi - \delta, \xi + \delta]$ für μ zum Konfidenzniveau $\gamma = 0.90$.

b) Wie groß muss die Stichprobengröße gewählt werden, damit bei demselben Konfidenzniveau die Länge 2δ des Konfidenzintervalls gleich 0.2 ist?

c) Wie zeigt man (im Prinzip), dass die Summe zweier unabhängiger normalverteilter Variablen ebenfalls normalverteilt ist? Wie erhält man dann das Mittel und die Varianz der Summenvariablen?

5.) Bestimmen Sie die stationäre Temperaturverteilung $u(r, \varphi)$ in einer kreisförmigen, an Ober- und Unterseite isolierten Platte mit Radius 1, deren Rand auf der Temperatur $u(1, \varphi) = f(\varphi) = \varphi$ $(-\pi < \varphi < \pi)$ gehalten wird (Hinweis zur Kontrolle: Die Koeffizienten der Fourierreihe für $f(\varphi)$ lauten $b_k = 2\frac{(-1)^{k+1}}{k}$).