Prüfung aus Mathematik (2) ALT für BI
am 19. 3. 2004

Zuname: ....
Vorname: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

Kennzahl / Mat.Nr.: ....

1.) a) Die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ lauten $0, 0, \mathrm{i}\sqrt{2}, -\mathrm{i}\sqrt{2}$ (Nicht nachrechnen).

Bestimmen Sie die zwei zum Doppeleigenwert 0 gehörigen Fundamentallösungen des Differentialgleichungssystems $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$.

b) Wie lautet der <u>*Ansatz*</u> für eine Partikulärlösung des Systems $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{r} + \boldsymbol{s}\cos\sqrt{2}t$, wobei $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{R}^4$ konstante Spaltenvektoren sind.

2.) Ein an einem Faden der Länge 1 im Schwerefeld mit Fallbeschleunigung 1 hängender Massenpunkt mit Einheitsmasse wird im Tiefstpunkt mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 2$ tangential angestoßen. Seine Position zum Zeitpunkt t sei mit $s = s(t)$ bezeichnet (s ist die vom Tiefstpunkt aus gemessene Bogenlänge auf dem Einheitskreis). Bestimmen Sie den Peripheriepunkt $\boldsymbol{x}$ mit den Koordinaten $x_1 = \sin s$, $x_2 = -\cos s$, in welchem die Kreisbahn in eine Parabel übergeht, da die Fliehkraft nicht mehr ausreicht, um den Faden zu spannen.

<u>Anleitung</u>: Im gesuchten Punkt ist die Fliehkraft $F = v^2$ gleich der Radialkomponente der Schwerkraft $G = -\cos s$. Die Geschwindigkeit $v = v(s) = s'(t)$ erhalten Sie durch Lösung der Differentialgleichung $s'' = f(t, s, s') = -\sin s$ unter den Anfangsbedingungen $s(0) = 0$, $(s'(0) =)\ v_0 = 2$.
Hinweis zur Kontrolle: Es ergibt sich $v = \sqrt{v_0^2 - 2 + 2\cos s}$. Aus der Gleichung $F = G$ lässt sich nun s explizit bestimmen.

3.) Welche Punkte der Fläche $w = w(s, v) = \dfrac{v^2}{2} + 1 - \cos s$ sind elliptisch, welche hyperbolisch, welche parabolisch (Skizzieren Sie die betreffenden Bereiche in der $\{s, v\}$−Ebene). Skizzieren Sie die drei Niveaulinien $w = \frac{1}{2}$, $w = \frac{4}{2}$, $w = \frac{9}{2}$ (Es handelt sich um die "Energiefläche" des Stangenpendels; die Niveaulinien $w = v_0^2/2$ sind gerade die Phasenbahnen $v^2 = v_0^2 - 2 + 2\cos s$).

4.) Geben Sie eine möglichst allgemeine Lösung der Differentialgleichung $5u_{xx} - 12u_{xy} + 5u_{yy} = 0$ an
Hinweis: nach passender Orthogonaltransformation ergibt sich in den neuen Variablen eine Schwingungsgleichung, deren d'Alembertsche Lösung rückzutransformieren ist.

5.) a) Bestätigen Sie durch einfaches Einsetzen, dass die Funktionen $y_k(r) = \frac{1}{r}\sin k\pi r$ $(k = 1, 2, \ldots)$ Lösungen der Differentialgleichung $-(r^2y')' = r^2\mu^2 y$ $(\mu = k\pi)$ sind und den Randbedingungen $|y(0)| < \infty$, $y(1) = 0$ genügen. Diese Funktionen sind also Eigenfunktionen eines Sturm-Liouvilleschen Randwertproblems. Geben Sie das Skalarprodukt an, bezüglich dessen die y_k paarweise aufeinander senkrecht stehen. Wie berechnet man (im Prinzip) die Koeffizienten der Entwicklung $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k y_k(r)$ einer Funktion $f(r)$ nach diesen Eigenfunktionen?

b) Die zeitabhängige (radialsymmetrische) Temperaturverteilung in einer Kugel, deren Rand auf konstanter Temperatur 0° gehalten wird, ist beschrieben durch eine Reihendarstellung $u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{1}{r} \sin(k\pi r)\, e^{-k^2\pi^2c^2t}$. Rechnen Sie nach, dass $u(r, t)$ wirklich der Wärmeleitungsgleichung $u_t = c^2\Delta u = c^2(u_{rr} + \frac{2}{r}u_r)$ $(= c^2(r^2u_r)_r))$ genügt (dabei wird angenommen, dass gliedweises Differenzieren der Reihe erlaubt ist). Wie passt man (im Prinzip) die allgemeine Lösung an eine Anfangsbedingung $u(r, 0) = f(r)$ an?

Prüfung aus Mathematik (2) NEU für BI Zuname: ....

am 19. 3. 2004 Vorname: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen! Kennzahl: ....

Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden! Mat.Nr.: ....

Arbeitszeit: 150 Minuten

1.) a) Die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ lauten $0, 0, \mathrm{i}\sqrt{2}, -\mathrm{i}\sqrt{2}$ (Nicht nachrechnen).

Bestimmen Sie die zwei zum Doppeleigenwert 0 gehörigen Fundamentallösungen des Differentialgleichungssystems $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$.

b) Wie lautet der <u>*Ansatz*</u> für eine Partikulärlösung des Systems $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{r} + \boldsymbol{s}\cos\sqrt{2}t$, wobei $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s} \in \boldsymbol{R}^4$ konstante Spaltenvektoren sind.

2.) Ein an einem Faden der Länge 1 im Schwerefeld mit Fallbeschleunigung 1 hängender Massenpunkt mit Einheitsmasse wird im Tiefstpunkt mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 2$ tangential angestoßen. Seine Position zum Zeitpunkt t sei mit $s = s(t)$ bezeichnet (s ist die vom Tiefstpunkt aus gemessene Bogenlänge auf dem Einheitskreis). Bestimmen Sie den Peripheriepunkt $\boldsymbol{x}$ mit den Koordinaten $x_1 = \sin s$, $x_2 = -\cos s$, in welchem die Kreisbahn in eine Parabel übergeht, da die Fliehkraft nicht mehr ausreicht, um den Faden zu spannen.

<u>Anleitung</u>: Im gesuchten Punkt ist die Fliehkraft $F = v^2$ gleich der Radialkomponente der Schwerkraft $G = -\cos s$. Die Geschwindigkeit $v = v(s) = s'(t)$ erhalten Sie durch Lösung der Differentialgleichung $s'' = f(t, s, s') = -\sin s$ unter den Anfangsbedingungen $s(0) = 0$, $(s'(0) =)\ v_0 = 2$.

Hinweis zur Kontrolle: Es ergibt sich $v = \sqrt{v_0^2 - 2 + 2\cos s}$. Aus der Gleichung $F = G$ lässt sich nun s explizit bestimmen.

3.) Welche Punkte der Fläche $w = w(s, v) = \dfrac{v^2}{2} + 1 - \cos s$ sind elliptisch, welche hyperbolisch, welche parabolisch (Skizzieren Sie die betreffenden Bereiche in der $\{s, v\}$−Ebene). Skizzieren Sie die drei Niveaulinien $w = \frac{1}{2}$, $w = \frac{4}{2}$, $w = \frac{9}{2}$ (Es handelt sich um die "Energiefläche" des Stangenpendels; die Niveaulinien $w = v_0^2/2$ sind gerade die Phasenbahnen $v^2 = v_0^2 - 2 + 2\cos s$).

4.) Würfelt man 12 mal hintereinander mit einem fairen Würfel, dann ist die Anzahl s der in einer solchen Serie vorkommenden Einsen $B(12, \frac{1}{6})$-verteilt (d.h. binomialverteilt mit Parametern $m = 12$ und $p = \frac{1}{6}$. Das Mittel ist dann bekanntlich $\mu = mp$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{mp(1-p)}$. Jemand erhält in einem Experiment mit $n = 16$ Serien von je 12 Würfen die folgenden Ergebnisse: $[s_1, s_2, \ldots, s_{16}]$=$[4, 0, 1, 1, 2, 1, 0, 1, 0, 0, 2, 0, 2, 0, 1, 1]$. Geben Sie ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 0.90 für das Mittel an und vergleichen Sie mit dem tatsächlichen Wert. Die Binomialverteilung kann man sich dabei durch die Normalverteilung mit gleichem Mittel und gleicher Varianz ersetzt denken.

5.) a) Bestätigen Sie durch einfaches Einsetzen, dass die Funktionen $y_k(r) = \frac{1}{r}\sin k\pi r$ $(k = 1, 2, \ldots)$ Lösungen der Differentialgleichung $-(r^2 y')' = r^2\mu^2 y$ $(\mu = k\pi)$ sind und den Randbedingungen $|y(0)| < \infty$, $y(1) = 0$ genügen. Diese Funktionen sind also Eigenfunktionen eines Sturm-Liouvilleschen Randwertproblems. Geben Sie das Skalarprodukt an, bezüglich dessen die y_k paarweise aufeinander senkrecht stehen. Wie berechnet man (im Prinzip) die Koeffizienten der Entwicklung $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k y_k(r)$ einer Funktion $f(r)$ nach diesen Eigenfunktionen?

b) Die zeitabhängige (radialsymmetrische) Temperaturverteilung in einer Kugel, deren Rand auf konstanter Temperatur 0° gehalten wird, ist beschrieben durch eine Reihendarstellung $u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{1}{r}\sin(k\pi r)\, e^{-k^2\pi^2 c^2 t}$. Rechnen Sie nach, dass $u(r, t)$ wirklich der Wärmeleitungsgleichung $u_t = c^2\Delta u = c^2(u_{rr} + \frac{2}{r}u_r)$ $(= c^2(r^2 u_r)_r))$ genügt (dabei wird angenommen, dass gliedweises Differenzieren der Reihe erlaubt ist). Wie passt man (im Prinzip) die allgemeine Lösung an eine Anfangsbedingung $u(r, 0) = f(r)$ an?