Prüfung aus Mathematik (2) ALT für BI Zuname: ....

am 29. 6. 2004 Vorname: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen! Kennzahl / Mat.Nr.: ....

Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!

Arbeitszeit: 150 Minuten

1.) a) Lösen Sie das Randwertproblem $v^{(4)} = \mu^4 v$, $v(0) = v''(0) = v(1) = v''(1) = 0$. Die Eigenfunktionen $v_k(x)$ beschreiben die Grundschwingungsmoden eines freischwingenden Stabes der Länge 1.

b) Wie erhält man die Frequenzen der in a) bestimmten Grundschwingungsmoden?

c) Wie lautet der <u>*Ansatz*</u> für eine Partikulärlösung der inhomogenen DG $v^{(4)} - \pi^4 v = \cosh \pi x + \sin \pi x$?

2.) Bestimmen Sie die Lösung $y(x)$ der autonomen Differentialgleichung $y'' = \dfrac{\sin y}{\cos^3 y}$, deren Graph durch den Punkt $(x_0, y_0) = (\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{\pi}{4})$ geht und dort die Steigung $\sqrt{2}$ hat.

3.) Gegeben seien die 5 Punkte $(0, c), (\frac{1}{4}, 0), (\frac{2}{4}, 0), (\frac{3}{4}, 0), (1, 0)$. Dabei ist c eine feste reelle Zahl. Bestimmen Sie die Gerade $y = a + bx$, für die $f(a, b) = \sum\limits_{k=1}^{5} (a + bx_k - y_k)^2$ minimal wird. Überzeugen Sie sich, dass der Schwerpunkt der gegebenen Punkte (die man sich alle mit der Einheitsmasse belegt denkt) auf der Geraden liegt. Bestätigen Sie ferner, dass sich die Gerade auf dem Intervall $[0, 1]$ beliebig wenig von der x-Achse unterscheidet, wenn man $|c|$ klein wählt.

4.) Berechnen Sie das Trägheitsmoment J des von der Lemniskate $(x^2 + y^2)^2 = xy$ im ersten Quadranten eingeschlossenen Bereichs D bezüglich der y-Achse.
<u>Hinweis zur Kontrolle</u>: $J = \iint_D x^2 \, dxdy = \dfrac{\pi}{128}$. Nach Übergang zu Polarkoordinaten ist der Bereich durch $0 \le r \le \sqrt{\frac{1}{2} \sin 2\varphi}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ beschrieben.

5.) Die allgemeine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $u_t = c^2 \Delta u$ für eine quadratische Platte $Q: 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$, deren Rand auf konstanter Temperatur $0°$ gehalten wird, lautet

$$u(x, y, t) = \sum_{k,j=1}^{\infty} c_{kj} e^{-(k^2+j^2)c^2\pi^2 t} \sin k\pi x \sin j\pi y \ .$$

Wählen Sie der Einfachkeit halber $c^2\pi^2 = 1$ und passen Sie die Lösung an die Anfangsbedingung $u(x, y, 0) = f(x, y) = 1 =$const an. Die so erhaltene Funktion lässt sich in der Form $u(x, y, t) = g(x, t)\, g(y, t)$ schreiben; Wie lautet $g(x, t)$? Speziell ist also die Temperatur im Mittelpunkt der Platte gegeben durch $u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, t) = g(\frac{1}{2}, t)^2$. Skizzieren Sie diesen Temperaturverlauf.

Prüfung aus Mathematik (2) NEU für BI
am 29. 6. 2004
Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

Zuname: ....
Vorname: ....
Kennzahl / Mat.Nr.: ....

1.) a) Lösen Sie das Randwertproblem $v^{(4)} = \mu^4 v$, $v(0) = v''(0) = v(1) = v''(1) = 0$. Die Eigenfunktionen $v_k(x)$ beschreiben die Grundschwingungsmoden eines freischwingenden Stabes der Länge 1.

b) Wie erhält man die Frequenzen der in a) bestimmten Grundschwingungsmoden?

c) Wie lautet der <u>*Ansatz*</u> für eine Partikulärlösung der inhomogenen DG $v^{(4)} - \pi^4 v = \cosh \pi x + \sin \pi x$?

2.) Bestimmen Sie die Lösung $y(x)$ der autonomen Differentialgleichung $y'' = \dfrac{\sin y}{\cos^3 y}$, deren Graph durch den Punkt $(x_0, y_0) = (\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{\pi}{4})$ geht und dort die Steigung $\sqrt{2}$ hat.

3.) Gegeben seien die 5 Punkte $(0, c), (\frac{1}{4}, 0), (\frac{2}{4}, 0), (\frac{3}{4}, 0), (1, 0)$. Dabei ist c eine feste reelle Zahl. Bestimmen Sie die Gerade $y = a + bx$, für die $f(a, b) = \sum_{k=1}^{5} (a + bx_k - y_k)^2$ minimal wird. Überzeugen Sie sich, dass der Schwerpunkt der gegebenen Punkte (die man sich alle mit der Einheitsmasse belegt denkt) auf der Geraden liegt. Bestätigen Sie ferner, dass sich die Gerade auf dem Intervall $[0, 1]$ beliebig wenig von der x-Achse unterscheidet, wenn man $|c|$ klein wählt.

4.) Ein Unternehmen fertigt Flachbildschirme. Dabei ist die Ausschusswahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{5}$, d.h. im Schnitt bestehen von 1000 Stück nur 800 die Endkontrolle.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit γ, dass in einer Charge von $n = 1000$ Stück weniger als $s^* = 790$ brauchbare produziert werden? Anleitung: Die Zahl s_n der brauchbaren Stücke in einer Charge vom Umfang n ist binomialverteilt gemäß $\mathrm{B}(n, \frac{4}{5})$. Wegen der Größe von n kann man $\mathrm{B}(n, \frac{4}{5})$ durch die entsprechende Normalverteilung ersetzen.

b) Bestimmen Sie den Wert s^*, für den garantiert ist, dass in einer Charge von $n = 1000$ Stück nur mit 2.5%-iger Wahrscheinlichkeit ($\gamma = 0.025$) weniger als s^* brauchbare vorkommen.

5.) Die allgemeine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $u_t = c^2 \Delta u$ für eine quadratische Platte $Q: 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$, deren Rand auf konstanter Temperatur 0° gehalten wird, lautet

$$u(x, y, t) = \sum_{k,j=1}^{\infty} c_{kj} e^{-(k^2+j^2)c^2\pi^2 t} \sin k\pi x \, \sin j\pi y \; .$$

Wählen Sie der Einfachheit halber $c^2\pi^2 = 1$ und passen Sie die Lösung an die Anfangsbedingung $u(x, y, 0) = f(x, y) = 1 = \text{const}$ an. Die so erhaltene Funktion lässt sich in der Form $u(x, y, t) = g(x, t)\, g(y, t)$ schreiben; Wie lautet $g(x, t)$? Speziell ist also die Temperatur im Mittelpunkt der Platte gegeben durch $u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, t) = g(\frac{1}{2}, t)^2$. Skizzieren Sie diesen Temperaturverlauf.