Mathematik 1 für BI, MB, WIMB und VT

Prüfung am 11.10.2019
Gabriel Maresch

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus fünf Aufgaben I, II, III, IV und V, untergliedert jeweils in mehrere Teilaufgaben A, B, C, ... Die Gewichtung jeder Aufgabe und jedes Unterpunktes ist jeweils am Beginn angegeben. Insgesamt können 100 Punkte erreicht werden, ab 50 Punkten ist Ihnen eine positive Note sicher.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn in der Angabe nicht ausdrücklich anders vermerkt, werden zu jeder Teilaufgabe die Punkte ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar neben bzw. unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe).

  In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie sich, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung.

  Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Aufgabe	I	II	III	IV	V	VI	Total
Punkte	20	17	24	20	19	0	100
Bonuspunkte	0	0	0	0	0	5	5
erreicht							

Aufgabe I .... *20 Punkte*

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil A) Wie ist die Fakultät $n!$ für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ definiert? Erläutern Sie kurz den Zusammenhang zwischen Faktoriellen und Permutationen!

$\boxed{\text{8 P.}}$ (Teil B) Wie lauten die Summationsgrenzen ① und ② sowie die Exponenten ③ und ④ im Binomischen Lehrsatz?

$$(a+b)^n = \sum_{①}^{②} \binom{n}{k} a^{③} \, b^{④}$$

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil C) Schreiben Sie für $n = 3$ den Binomischen Lehrsatz an, führen Sie die Summation explizit durch (d.h. ohne $\sum$-Symbol) und berechnen Sie insbesondere die dabei auftretenden Binomialkoeffizienten!

$\boxed{\text{2 P.}}$ (Teil D) Die Aussage $|A \cup B| = |A| + |B|$ ist im Allgemeinen falsch. Zeigen Sie das anhand eines konkreten Gegenbeispiels:

$A =$ $B =$

$\boxed{\text{2 P.}}$ (Teil E) Das Inklusions-Exklusions-Prinzip für zwei Mengen A, B besagt:

$$|A \cup B| = \; |A| \_\_ |B| \_\_ |A \cap B|$$

Fügen Sie in die Zwischenräume __ die korrekten Koeffizienten so ein, dass eine wahre Aussage entsteht.

Aufgabe II .... *17 Punkte*

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil A) Geben Sie eine Formel an (d.h. eine mathematische Aussage mit Variablen, Junktoren und Quantoren), welche beschreibt, dass die reelle Folge $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ monoton fallend ist:

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil B) Gegeben ist eine Folge positiver reeller Zahlen a_k. Wenn $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, nennt man $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ bekanntlich eine Leibniz-Reihe. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die Teilfolge $(s_{2n})_{n=0}^{\infty}$ nach oben durch a_0 beschränkt ist, wobei $s_{2n} = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k$ die $2n$-te Teilsumme bezeichnet.

<u>Induktionsstart:</u> $s_2 = a_0 - (a_1 - a_2) \leq a_0$

<u>Induktionsannahme:</u> <u>Induktionsbehauptung:</u>

<u>Beweis:</u>

$\boxed{\text{2 P.}}$ (Teil C) Für welche $q \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(q^n)_{n=0}^{\infty}$ eine Nullfolge?

$\boxed{\text{2 P.}}$ (Teil D) Für welche $q \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(q^n)_{n=0}^{\infty}$ monoton fallend?

$\boxed{\text{3 P.}}$ (Teil E) Für welche $q \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^n$ eine *konvergente* Leibniz-Reihe? Wie lautet ihr Grenzwert?

Aufgabe III .... *24 Punkte*

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil A) Wie lautet die Definition des Funktionsgrenzwertes $\lim_{x\to x_0} f(x)$?

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil B) Geben Sie ein Beispiel einer reellen Funktion $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, welche an allen Stellen $x \neq 1$ stetig, an $x = 1$ aber unstetig ist.

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil C) Wie lautet der Zwischenwertsatz für stetige reelle Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$?

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil D) Ist die Gleichung $xe^x = 1$ in den reellen Zahlen lösbar? Argumentieren Sie warum bzw. warum nicht.

Aufgabe IV .... *20 Punkte*

$\boxed{\text{5 P.}}$ (Teil A) Was versteht man unter dem Differentialquotienten einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in [a, b]$? Fertigen Sie dazu auch eine erklärende Skizze an!

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil B) Die „Ableitungsregel" $(f \cdot g)' = f' \cdot g'$ ist offensichtlich falsch. Wie lautet die korrekte Version? Überprüfen Sie die richtige Version explizit für die Funktionen $f(x) = x^n$ und $g(x) = x^m$ mit $n, m \geq 0$.

$\boxed{\text{3 P.}}$ (Teil C) Angenommen die Ableitung einer bijektiven Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lautet $f'(x) = \frac{e^x}{1+\cos^2 x}$ und $f(0) = 1$. Wie lautet die Ableitung der Umkehrfunktion $f^{(-1)}$ an der Stelle $x = 1$?

$\boxed{\text{3 P.}}$ (Teil D) Angenommen die Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lautet wieder $f'(x) = \frac{e^x}{1+\cos^2 x}$ und $f(0) = 1$. Wie lautet die *Gleichung* der Tangente an den Funktionsgraphen von f im Punkt $x = 0$?

$\boxed{\text{3 P.}}$ (Teil E) Angenommen eine (mindestens viermal) differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt an der Stelle $x = 0$ die Ableitungen $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ und $f''''(0) = 1$. Was können Sie daraus für die Stelle $x = 0$ schließen?

Aufgabe V .... *19 Punkte*

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil A) Finden Sie eine Stammfunktion von $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ indem Sie die Methode der *partiellen Integration* verwenden.

$\boxed{\text{2 P.}}$ (Teil B) Finden Sie eine Stammfunktion von $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ indem Sie die Identität $\frac{1}{2} \sin 2x = \sin x \cdot \cos x$ verwenden.

$\boxed{\text{2 P.}}$ (Teil C) Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt insbesondere, dass sich die Stammfunktionen aus (Teil A) und (Teil B) nur um eine Konstante unterscheiden können. Wie lautet diese Konstante hier?

$\boxed{\text{8 P.}}$ (Teil D) Wie lautet überhaupt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung?

$\boxed{\text{3 P.}}$ (Teil E) Geben Sie je ein Beispiel (ohne Rechnung) eines bestimmten, eines unbestimmten und eines uneigentlichen Integrals an.

- bestimmtes Integral:
- unbestimmtes Integral:
- uneigentliches Integral:

VI. Bonusfragen

$\boxed{1 \text{ (bonus)}}$ (Teil A) Geben Sie eine (möglichst interessante) Eigenschaft von Polynomfunktionen an.

$\boxed{1 \text{ (bonus)}}$ (Teil B) Geben Sie eine (möglichst interessante) Eigenschaft an, die in $\mathbb{Q}$ gilt, in $\mathbb{Z}$ aber nicht.

$\boxed{1 \text{ (bonus)}}$ (Teil C) Geben Sie eine konvergente Reihe an, die nicht absolut konvergiert.

$\boxed{1 \text{ (bonus)}}$ (Teil D) Wie lauten der Real- und der Imaginärteil von $e^{i\pi}$?

$\boxed{1 \text{ (bonus)}}$ (Teil E) Welche Polarkoordinaten hat der Punkt P mit kartesischen Koordinaten $x_P = 1$ und $y_P = 1$?

$r =$ ______________ und $\varphi =$ ______________

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.