# Mathematatik 1 für BI, MB, WIMB und VT

**Prüfung am 14.6.2019**
**Gabriel Maresch**

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

---

**Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:**

- Die Prüfung besteht aus fünf Aufgaben I, II, III, IV und V, untergliedert jeweils in mehrere Teilaufgaben A, B, C, ... Die Gewichtung jeder Aufgabe und jedes Unterpunktes ist jeweils am Beginn angegeben. Insgesamt können 100 Punkte erreicht werden, ab 50 Punkten ist Ihnen eine positive Note sicher.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn in der Angabe nicht ausdrücklich anders vermerkt, werden zu jeder Teilaufgabe die Punkte ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar neben bzw. unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe).

  In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie sich, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung.

  **Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.**
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

---

Nur vom Prüfer auszufüllen:

| Aufgabe | I | II | III | IV | V | VI | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | 16 | 20 | 22 | 20 | 22 | 0 | 100 |
| Bonuspunkte | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 | 10 |
| erreicht | | | | | | | |

Aufgabe I ........................................................................................ *16 Punkte*

$\boxed{\text{2 P.}}$ (Teil A) Wie ist die zur komplexen Zahl $z = a + ib$ konjugierte komplexe Zahl $\overline{z}$ definiert?

---

$\boxed{\text{8 P.}}$ (Teil B) Gegeben ist eine Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$ eines Polynoms

$$p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$$

mit reellen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $p\big(\overline{z_0}\big)$ und geben Sie an, welche Eigenschaften der komplexen Konjugation Sie jeweils verwendet haben.

---

$\boxed{\text{2 P.}}$ (Teil C) Wie ist der Absolutbetrag $|z|$ der komplexen Zahl $z = a + ib$ definiert?

---

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil D) Fertigen Sie eine Skizze jener Teilmenge der Gauß'schen Zahlenebene an, welche alle komplexen Zahlen $z$ mit $|z - i| = 1$ enthält.

Aufgabe II ........................................................................................ *20 Punkte*

$\boxed{2\text{ P.}}$ (Teil A) Das **Sandwich-Theorem** erlaubt es, von der Konvergenz zweier Folgen $a_n$ und $b_n$ mit $a_n \leq x_n \leq b_n$ (für alle $n \in \mathbb{N}$) auf die Konvergenz der Folge $x_n$ zu schließen. Was muss dabei für die Grenzwerte $\lim a_n$ und $\lim b_n$ gelten, damit das möglich ist?

---

$\boxed{8\text{ P.}}$ (Teil B) Verwenden Sie das Sandwich-Theorem aus Teil A und $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1$, um den Grenzwert der Folge $x_n = \sqrt[n]{1 + n \cdot \sin^2 n}$ zu berechnen. Geben Sie dazu $a_n$ und $b_n$ wie in Teil A gefordert an!

$a_n =$______________, $b_n =$______________, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =$______________

---

$\boxed{10\text{ P.}}$ (Teil C) Für die Konvergenz einer unendlichen Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist die Konvergenz der Folgenglieder $a_n$ gegen 0 notwendig, aber nicht hinreichend. Geben Sie ein Beispiel an, bei dem $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ aber nicht existiert. Begründen Sie dabei sowohl Konvergenz- als auch Divergenzaussage.

$a_n =$______________

Aufgabe III ........................................................................................ *22 Punkte*

$\boxed{\text{10 P.}}$ (Teil A) Definieren Sie, was es für eine reelle Funktion $f$ bedeutet, an einer Stelle $x_0$ **stetig** zu sein. Erklären Sie die von Ihnen verwendeten Begriffe.

---

$\boxed{\text{2 P.}}$ (Teil B) Der **Satz vom Maximum** garantiert unter bestimmten zusätzlichen Voraussetzungen die Existenz eines Maximums einer stetigen reellen Funktion $f : D \to \mathbb{R}$. Was versteht man überhaupt unter einem ,,Maximum"?

---

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil C) Formulieren Sie den **Satz vom Maximum** und geben Sie insbesondere die in Teil B erwähnte Zusatzvoraussetzung an.

---

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil D) Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, dass der **Satz vom Maximum** ohne die Eigenschaft der Stetigkeit nicht zu gelten braucht.

Aufgabe IV ........................................................................................ *20 Punkte*

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil A) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f : x \mapsto \sqrt{\ln(1+x^2)}$ für jene $x$, für welche die Ableitung definiert ist (vgl Teil D).

---

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil B) Welche Ableitungsregel(n) haben Sie in Teil A verwendet? Geben Sie nicht nur den Namen, sondern die vollständige Formulierung an (aber nicht den Beweis).

---

$\boxed{\text{2 P.}}$ (Teil C) Wo lässt sich $f$ definieren? Geben Sie einen möglichst großen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ an!

---

$\boxed{\text{2 P.}}$ (Teil D) Welcher Definitionsbereich ergibt sich für die Ableitung $f'$?

---

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil E) Erläutern Sie, wie es möglich ist, dass $f$ an $x = 0$ ein globales Minimum besitzt, dort aber nicht $f'(x) = 0$ gilt.

Aufgabe V ........................................................................................ *22 Punkte*

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil A) Bestimmen Sie alle Stammfunktion von $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^2}$. Begründen Sie, warum es keine weiteren Stammfunktionen gibt.

---

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil B) Sei $F$ eine Stammfunktion von $f$, und $g$ eine differenzierbare Funktion. Geben Sie eine Stammfunktion von $x \mapsto f(g(x)) \cdot g'(x)$ an.

---

$\boxed{\text{8 P.}}$ (Teil C) Berechnen Sie den Wert des bestimmten Integrals $\int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx$.

---

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil D) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ und $\mathcal{Z}'$ eine Verfeinerung von $\mathcal{Z}$. Welche Ordnungsbeziehung (d.h. kleiner gleich oder größer gleich) gilt zwischen den vier Unter- und Obersummen $U(f; \mathcal{Z}), O(f; \mathcal{Z}), U(f; \mathcal{Z}')$ und $O(f; \mathcal{Z}')$?

__________ $\leq$ __________ $\leq$ __________ $\leq$ __________

VI. Bonusfragen

$\boxed{\text{2 (bonus)}}$ (Teil A) Geben Sie eine (möglichste interessante) Eigenschaft an, die $\mathbb{C}$ hat, $\mathbb{R}$ aber nicht.

---

$\boxed{\text{2 (bonus)}}$ (Teil B) Geben Sie eine (möglichste interessante) Eigenschaft an, die $\mathbb{R}$ hat, $\mathbb{Q}$ aber nicht.

---

$\boxed{\text{2 (bonus)}}$ (Teil C) Geben Sie eine stetige reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die nicht überall differenzierbar ist.

---

$\boxed{\text{2 (bonus)}}$ (Teil D) Geben Sie alle echten Teiler des reellen Polynoms $x^2 - 4$ an.

---

$\boxed{\text{2 (bonus)}}$ (Teil E) Welche kartesischen Koordinaten hat der Punkt $P$ mit Polarkoordinaten $r = 2$ und $\varphi = \frac{3\pi}{2}$?

$x_P =$ ______________ und $y_P =$ ______________

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.