Mathematik 1 für BI, MB, UI, WIMB und VT

Prüfung am 30.9.2020
Gabriel Maresch

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus fünf Aufgaben I, II, III, IV und V, untergliedert jeweils in Teilaufgaben A, B, C, ... Die Gewichtung jeder Aufgabe und jedes Unterpunktes ist jeweils am Beginn angegeben. Insgesamt können 100 Punkte erreicht werden, ab 50 Punkten ist Ihnen eine positive Note sicher.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn in der Angabe nicht ausdrücklich anders vermerkt, werden zu jeder Teilaufgabe die Punkte ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar neben bzw. unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe). **Resultate sind stets zu begründen. Für das Erraten richtiger Ergebnisse werden keine Punkte vergeben!**

  In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie sich, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die Blätter am Ende dieses Heftes zur Verfügung. **Was immer Sie auf diesen Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.**
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Aufgabe	I	II	III	IV	V	Total
Punkte	20	20	20	20	20	100
erreicht						

Aufgabe I .... *20 Punkte*

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil A) Wir betrachten zwei endliche Mengen A und B mit $|A| = 3$ und $|B| = 4$. Wie viele Funktionen $f : A \to B$, d.h. mit Definitionsbereich A und Wertevorrat B gibt es?

Antwort: Es gibt .... Funktionen von A nach B.

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil B) Jede Funktion $f : A \to B$ lässt sich als Relation zwischen A und B schreiben. Geben Sie konkret an, welcher Relation $R_f \subseteq A \times B$ die Funktion $f : A \to B$ entspricht.

$\boxed{\text{2 P.}}$ (Teil C) Nicht jede Relation zwischen A und B entspricht aber einer Funktion. Geben Sie für $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{a, b, c, d\}$ eine konkrete nichtleere Relation $R \subseteq A \times B$ an, die *keiner* Funktion entspricht.

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil D) Wichtige Eigenschaften von Funktionen $f : A \to B$ sind Injektivität und Surjektivität. Schreiben Sie *in Formelschreibweise* an, wann eine Funktion $f : A \to B$ injektiv bzw. surjektiv ist!

Antwort: $f : A \to B$ injektiv $\Leftrightarrow$ ...

Antwort: $f : A \to B$ surjektiv $\Leftrightarrow$ ...

$\boxed{\text{3 P.}}$ (Teil E) Wieviele injektive Funktionen $f : A \to B$ gibt es, wenn wieder $|A| = 3$ und $|B| = 4$?

Antwort: Es gibt .... injektive Funktionen zwischen A und B.

$\boxed{\text{3 P.}}$ (Teil F) Wieviele surjektive Funktionen $f : A \to B$ gibt es, wenn wieder $|A| = 3$ und $|B| = 4$?

Antwort: Es gibt .... surjektive Funktionen zwischen A und B.

Aufgabe II . . . . *20 Punkte*

$\boxed{3\text{ P.}}$ (Teil A) Definieren Sie *in Formelschreibweise*, was es für eine unendliche Folge (a_n) bedeutet, alternierend zu sein:

Antwort: (a_n) alternierend $\Leftrightarrow$ ...

$\boxed{3\text{ P.}}$ (Teil B) Geben Sie eine alternierende Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ an, bzw. argumentieren Sie, warum es keine solche Folge geben kann.

$\boxed{3\text{ P.}}$ (Teil C) Geben Sie eine alternierende Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ an, bzw. argumentieren Sie, warum es keine solche Folge geben kann.

$\boxed{3\text{ P.}}$ (Teil D) Geben Sie eine divergente alternierende Folge (a_n) an, bzw. argumentieren Sie, warum es keine solche Folge geben kann.

$\boxed{4\text{ P.}}$ (Teil E) Bestimmen Sie, für welche reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$, die unendliche Folge (a_n) mit $a_n = \frac{1}{x^n}$ alternierend ist:

$\boxed{4\text{ P.}}$ (Teil F) Bestimmen Sie, für welche reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$, die unendliche Folge (a_n) mit $a_n = \frac{1}{x^n}$ konvergent ist:

Aufgabe III .... *20 Punkte*

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil A) Wenn $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und umkehrbar ist, dann muss f auch streng monoton sein. Zeigen Sie <u>anhand eines konkreten Beispiels</u>, dass dieser Schluss für nicht stetige umkehrbare Funktionen i.A. unzulässig ist.

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil B) Definieren Sie in Formelschreibweise, was es für eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bedeutet „streng monoton" zu sein:

Antwort: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ streng monoton $\nearrow \quad \Leftrightarrow \quad \ldots$

Antwort: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ streng monoton $\searrow \quad \Leftrightarrow \quad \ldots$

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil C) Wenn $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton ist, dann muss auch die Umkehrfunktion $f^{(-1)}$ streng monoton sein. Bestimmen Sie das Monotonieverhalten dieser Umkehrfunktion für monoton steigendes bzw. monoton fallendes f.

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil D) Wenn $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ stetig und streng monoton steigend ist, dann muss auch die Umkehrfunktion $f^{(-1)}$ streng monoton sein. Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von $x \mapsto -\frac{1}{f^{(-1)}(x)}$.

Aufgabe IV .... *20 Punkte*

Gegeben ist für diese Aufgabe stets die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{(\sin x + \cos x)}$.

$\boxed{\text{8 P.}}$ (Teil A) Bestimmen Sie mittels Differentialrechnung, wo f (streng) monoton steigend und wo f (streng) monoton fallend ist und fertigen Sie eine aussagekräftige Skizze an!

$\boxed{\text{2 P.}}$ (Teil B) f lässt sich an $x_0 = 0$ in eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ entwickeln. Wie lauten die ersten beiden Koeffizienten a_0 und a_1?

Antwort: $a_0 = \ldots\ldots$ $a_1 = \ldots\ldots$

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil C) Der Satz von Taylor erlaubt eine Abschätzung des Fehlers, den man macht, wenn man die Funktion f in einem Intervall $[a, b]$ durch die Approximation $T_k(x) = \sum_{n=0}^{k} a_n x^n$ ersetzt. Wie groß ist dieser Fehler maximal[1], wenn man f für $x \in [-1, 1]$ durch $T_0(x) = a_0$ und wie groß, wenn man f durch $T_1(x) = a_0 + a_1 x$ ersetzt?

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil D) Wie lautet der Satz von Taylor überhaupt?

[1] Es muss dabei nicht unbedingt die kleinstmögliche solche Fehlerschranke gefunden werden. Sie können durchaus großzügige Abschätzungen verwenden, solange diese klar nachvollziehbar sind.

Aufgabe V .... *20 Punkte*

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil A) Finden Sie alle Stammfunktionen der Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$.

$\boxed{\text{2 P.}}$ (Teil B) Das Cauchy-Kriterium für Reihen erlaubt es, die Konvergenz mancher unendlichen Reihen auf die uneigentliche Integrierbarkeit einer Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^+$ zurückzuführen. Dabei werden die zwei Abschätzungen benutzt:

$$\text{(I)} \quad \sum_{k=1}^{n} f(k) \geq \int_1^{n+1} f(x)dx \qquad \text{und} \qquad \text{(II)} \quad \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_0^{n} f(x)dx$$

Damit die Ungleichungen (I) und (II) gültig sind, muss die Funktion f aber neben der Integrierbarkeit noch eine weitere Eigenschaft besitzen. Welche?

Antwort: Die Funktion f muss ...

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil C) Mithilfe welcher der Ungleichungen (I) oder (II) kann man auf die Konvergenz der unendlichen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(k)$ schließen? Mit welcher auf die Divergenz? Geben Sie beide Aussagen *vollständig* (d.h. inklusive der Vergleichsintegrale) an:

$\boxed{\text{10 P.}}$ (Teil D) Zeigen Sie, dass man auf die unendliche Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ das Cauchy-Kriterium anwenden kann und entscheiden Sie, ob die Reihe konvergiert oder divergiert!

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.