Mathematik 1 für BI, MB, UI, WIMB und VT
Gabriel Maresch
Stoffsemester Sommer 2020

Take-Home/Open-Book Prüfung am 27.11.2020

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus fünf Aufgaben I, II, III, IV und V, untergliedert jeweils in Teilaufgaben A, B, C, ... Die Gewichtung jeder Aufgabe und jedes Unterpunktes ist jeweils am Beginn angegeben. Insgesamt können 100 Punkte erreicht werden, ab 50 Punkten ist Ihnen eine positive Note sicher.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen gefragt ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Schriftliche Unterlagen sind erlaubt, alle anderen Hilfsmittel nicht.
- Wenn nicht anders angegeben, ist in allen Aufgaben Ihre Vorgehensweise stets zu begründen. Es ist Ihre Bringschuld, dafür zu sorgen, dass Ihre Ausführungen nachvollziehbar sind.
- Nicht nachvollziehbare Ergebnisse, insbesondere Ergebnisse, die ohne angemessene Zwischenschritte „vom Himmel fallen“, werden - unabhängig von ihrer Korrektheit - ausnahmslos *nicht gewertet*.

Aufgabe I .... *20 Punkte*

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil A) Gegeben ist das rechtwinkelige Dreieck mit Eckpunkten $A = (0,0), B = (b,0)$ und $C = (b,a)$ wobei $a,b > 0$. Der von den Seiten AB und AC eingeschlossene Winkel wird mit α bezeichnet. Berechnen Sie $\cos\alpha$ einerseits (i) direkt über die trigonometrische Definition als Quotient zweier Seitenlängen des Dreiecks und andererseits (ii) über eine geeignete Formel aus der Vektorrechnung, welche das Skalarprodukt von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ beinhaltet.

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil B) Gegeben ist das rechtwinkelige Dreieck mit Eckpunkten $A = (0,0,0), B = (0,0,b), C = (0,c,0)$ wobei $b,c > 0$. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks einerseits direkt (i) über die elementargeometrische Flächenformel eines rechtwinkeligen Dreiecks und andererseits (ii) über eine geeignete Formel aus der Vektorrechnung, welche das Vektorprodukt von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ beinhaltet.

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil C) Gegeben ist die Pyramide im $\mathbb{R}^3$, deren Grundfläche G das Parallelogramm mit den Eckpunkten $A = (2,0,0)$, $B = (0,2,0), C = (0,0,2)$ und $D = (-2,2,2)$ ist, und deren Spitze durch $S = (2,2,2)$ gegeben ist. Wir bezeichnen mit $\boldsymbol{\varepsilon}$ jene Ebene, in der die Grundfläche G liegt. Stellen Sie die Ebenengleichung für $\boldsymbol{\varepsilon}$ in Normalvektorform auf!

$\boxed{\text{8 P.}}$ (Teil D) Gegeben ist wieder die Pyramide aus Teil C. Finden Sie einen Punkt $F \in \boldsymbol{\varepsilon}$ und einen Vektor $\vec{N}$, orthogonal zu $\boldsymbol{\varepsilon}$, sodass $F + \vec{N} = S$.

Aufgabe II .... *20 Punkte*

$\boxed{2\text{ P.}}$ (Teil A) Das **Sandwich-Theorem** erlaubt es, von der Konvergenz zweier Folgen a_n und b_n mit $a_n \leq x_n \leq b_n$ (für alle $n \in \mathbb{N}$) auf die Konvergenz der Folge x_n zu schließen. Was muss dabei für die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ gelten, damit das möglich ist?

$\boxed{10\text{ P.}}$ (Teil B) Verwenden Sie das Sandwich-Theorem aus Teil A, sowie den bekannten Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$, um die Konvergenz der Folge $x_n = \sqrt[n]{1 + n \cdot \cos n + n^2}$ zu bestimmen. Bestimmen Sie dazu a_n und b_n wie in Teil A gefordert und führen Sie alle Grenzwertüberlegungen aus!

$\boxed{3\text{ P.}}$ (Teil C) Im folgenden interessieren wir uns für **Reihen** der Gestalt $R(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Für jedes α ist die Reihe $R(\alpha)$ entweder (1) absolut konvergent, (2) bedingt konvergent aber nicht absolut konvergent oder (3) weder bedingt noch absolut konvergent. Geben Sie für jede der drei Alternativen zumindest ein α an:

$\alpha_{(1)} = \ldots$ $\qquad$ $\alpha_{(2)} = \ldots$ $\qquad$ $\alpha_{(3)} = \ldots$

$\boxed{5\text{ P.}}$ (Teil D) Gibt es ein größtes bzw. kleinstes α, sodass $R(\alpha)$ bedingt konvergent aber nicht absolut konvergent ist? Bestimmen Sie diese Zahlenwerte bzw. begründen Sie, warum es keine solchen Zahlen geben kann.

Aufgabe III . . . . *20 Punkte*

4 P. (Teil A) Besonders einfache (aber auch wichtige) **stetige** Funktionen sind die affinen Funktionen

$$\boxed{f_{k,d} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f_{k,d}(x) = kx + d,}$$

wobei $k, d \in \mathbb{R}$ die bekannten Parameter für Steigung und Verschiebungskonstante sind. Für jedes $f_{k,d}(x)$ lässt sich in der Definition der Stetigkeit

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(x, \varepsilon) : \quad |x - y| < \delta(x, \varepsilon) \Rightarrow |f_{k,d}(x) - f_{k,d}(y)| = |(kx + d) - (ky + d)| < \varepsilon$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ein *gemeinsames* $\delta(\varepsilon)$ bestimmen. Wie lautet dieses $\delta(\varepsilon)$ und wie nennt man die Eigenschaft, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ stets ein $\delta(\varepsilon)$ *unabhängig* von der Stelle x gefunden werden kann?

4 P. (Teil B) $f_{k,d}(x) = kx + d$ ist ein lineares Polynom. Die Komposition zweier solcher Polynome $f_{k_1,d_1}(f_{k_2,d_2}(x))$ ist bekanntlich ebenfalls ein Polynom. Welchen Grad hat die Komposition zweier Polynome vom Grad 1, zweier Polynome vom Grad 2, zweier Polynome vom Grad 3 bzw. allgemeinem Grad n? Wieso spielt hier Grad 1 eine besondere Rolle?

4 P. (Teil C) Vervollständigen Sie die Gleichung und erklären Sie Ihre Vorgangsweise:

$$f_{k_1,d_1}(f_{k_2,d_2}(x)) = \underline{\qquad} \cdot x + \underline{\qquad}$$

4 P. (Teil D) Die Umkehrfunktion der affinen Funktion $f_{k,d}(x) = kx + d$ ist wieder eine affine Funktion. Welche? Skizzieren Sie $f_{k,d}$ und $f_{k,d}^{(-1)}$ so, dass man aus Ihrer Skizze klar erkennt, dass es sich tatsächlich um Umkehrfunktionen handelt.

4 P. (Teil E) Für $k \neq 0$ nimmt die *stetige* Funktion $f_{k,d} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kein Maximum an. Wieso ist das trotzdem kein Widerspruch zum Satz vom Maximum?

Aufgabe IV .... *20 Punkte*

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil A) Die „Ableitungsregel" $(f \cdot g)''(x) = f''(x)g(x) + f(x)g''(x)$ ist falsch. Zeigen Sie das anhand einer konkreten Wahl von f und g, d.h. berechnen Sie beide Seiten der obigen Gleichung für Ihr konkretes f, g und zeigen Sie dann, dass diese beiden Seiten nicht übereinstimmen.

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil B) Wie lautet die korrekte Version der Ableitungsregel aus Teil A? Überprüfen Sie die Richtigkeit anhand Ihres Gegenbeispiels aus Teil A, d.h. berechnen Sie $(f \cdot g)''$ einmal direkt und einmal mithilfe der korrekten Ableitungsregel und zeigen Sie, dass jetzt die beiden Resultate sehr wohl übereinstimmen.

$\boxed{\text{3 P.}}$ (Teil C) Angenommen die Ableitung einer bijektiven Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lautet $f'(x) = \frac{1}{\pi} \arctan(e^x)$ und es gilt $f(0) = 1$. Wie lautet die Ableitung der Umkehrfunktion $f^{(-1)}(x)$ an der Stelle $x = 1$?

$\boxed{\text{3 P.}}$ (Teil D) Sei f dieselbe Funktion wie in Teil C, d.h mit $f'(x) = \frac{1}{\pi} \arctan(e^x)$ und es gilt $f(0) = 1$. Wie lautet die *Gleichung* der Tangente an den Funktionsgraphen von f im Punkt $x = 0$?

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil E) Angenommen eine (mindestens dreimal) differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt

(i). an der Stelle $x_1 = 1$ die Ableitungen $f'(1) = 5, f''(1) = 0, f'''(1) = 0$,

(ii). an der Stelle $x_2 = 2$ die Ableitungen $f'(2) = 0, f''(2) = 5, f'''(2) = 0$,

(iii). an der Stelle $x_3 = 3$ die Ableitungen $f'(3) = 0, f''(3) = 0, f'''(3) = 5$.

Was können Sie jeweils für die Stellen x_1, x_2 und x_3 daraus schließen?

Aufgabe V .... *20 Punkte*

$\boxed{6\text{ P.}}$ (Teil A) Wo ist $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x}$ definiert und wie kann man dort eine Stammfunktion finden? Erklären Sie die wesentlichen Rechenschritte und machen Sie am Ende für Ihr Ergebnis die Probe!

$\boxed{6\text{ P.}}$ (Teil B) Kann man auf die unendliche Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$ das Cauchy'sche Integralkriterium anwenden? Überprüfen Sie, ob alle Voraussetzungen erfüllt sind und geben Sie das uneigentliche Vergleichsintegral für Konvergenz, sowie das uneigentliche Vergleichsintegral für Divergenz (jeweils mit den richtigen Grenzen!) an.

$\boxed{2\text{ P.}}$ (Teil C) Konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$? Kurze Begründung genügt.

$\boxed{6\text{ P.}}$ (Teil D) Wenn $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion besitzt (d.h eine differenzierbare Funktion $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $s'(x) = f(x)$ für *alle* $x \in [a, b]$), dann stimmt diese Stammfunktion bekanntlich bis auf eine additive Konstante mit der Funktion

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

überein. Es gibt aber auch integrierbare Funktionen, die keine Stammfunktion besitzen. Geben Sie ein konkretes Beispiel $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dafür an! Berechnen Sie weiters für Ihr Beispiel die Funktion

$$G(x) = \int_a^x g(t)\, dt$$

und finden Sie alle Stellen $x \in [a, b]$ für die nun eben nicht $G'(x) = g(x)$ gilt.

Hinweis: Die Funktion g kann sehr einfach gewählt werden!