Mathematik 1 für BI, MB, WIMB und VT

Prüfung am 29.11.2019
Gabriel Maresch

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus fünf Aufgaben I, II, III, IV und V, untergliedert jeweils in mehrere Teilaufgaben A, B, C, ... Die Gewichtung jeder Aufgabe und jedes Unterpunktes ist jeweils am Beginn angegeben. Insgesamt können 100 Punkte erreicht werden, ab 50 Punkten ist Ihnen eine positive Note sicher.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn in der Angabe nicht ausdrücklich anders vermerkt, werden zu jeder Teilaufgabe die Punkte ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar neben bzw. unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe).

  In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie sich, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung.

  Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Aufgabe	I	II	III	IV	V	Total
Punkte	20	21	21	20	18	100
erreicht						

Aufgabe I . . . . *20 Punkte*

$\boxed{4\text{ P.}}$ (Teil A) Eine Primzahl ist bekanntlich eine natürliche Zahl, die nur durch 1 und sich selbst teilbar ist. Schreiben Sie diese Definition als Formel an (d.h. als $p \in \mathbb{P} \Leftrightarrow \ldots$) und verwenden Sie dabei nur logische Symbole, das Teilbarkeitssymbol $|$ und Variablenbezeichnungen.

$\boxed{4\text{ P.}}$ (Teil B) Wie lautet der Satz über die *Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung*? Präzisieren Sie insbesondere, was man dabei unter ,,Eindeutigkeit" zu verstehen hat.

$\boxed{4\text{ P.}}$ (Teil C) Für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ lässt sich $n!$ nicht nur explizit durch $n! = \prod_{k=1}^{n} k$ definieren, sondern auch rekursiv, indem man angibt, wie sich $(n+1)!$ mit Hilfe von $n!$ berechnen läßt. Geben Sie die Rekursion $a_n = n!$ an, indem Sie vervollständigen:

$$a_1 = \ldots \qquad\qquad a_{n+1} = \ldots$$

$\boxed{5\text{ P.}}$ (Teil D) Führen Sie die in Teil B garantierte Primfaktorzerlegung für 11! explizit durch:

$\boxed{3\text{ P.}}$ (Teil E) In Teil D wurde stillschweigend vorausgesetzt, dass die Zeichenfolge '11' die dekadische Darstellung einer natürlichen Zahl ist. Berechnen Sie nun 11! unter der Annahme, dass es sich dabei um die *binäre* Darstellung handelt. Geben Sie auch das Ergebnis in Binärdarstellung an!

Aufgabe II .... *21 Punkte*

$\boxed{8\text{ P.}}$ (Teil A) Eine unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert bekanntlich genau dann, wenn die Folge ihrer Partialsummen $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert. Wie ist die Konvergenz einer Folge $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ gegen einen Grenzwert $S \in \mathbb{R}$ überhaupt definiert?

$\boxed{4\text{ P.}}$ (Teil B) Und was versteht man unter der Partialsumme s_n?

$\boxed{3\text{ P.}}$ (Teil C) Im folgenden interessieren wir uns für Reihen der Gestalt $R(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Für jedes α ist die Reihe $R(\alpha)$ entweder (1) absolut konvergent, (2) bedingt konvergent aber nicht absolut konvergent oder (3) weder bedingt noch absolut konvergent. Geben Sie für jede der drei Alternativen zumindest ein α an:

$\alpha_{(1)} = \ldots$ $\qquad$ $\alpha_{(2)} = \ldots$ $\qquad$ $\alpha_{(3)} = \ldots$

$\boxed{2\text{ P.}}$ (Teil D) Gibt es ein größtes bzw. kleinstes α sodass $R(\alpha)$ absolut konvergent ist? Geben Sie die Zahlenwerte an bzw. begründen Sie, warum es keine geben kann.

$\boxed{2\text{ P.}}$ (Teil E) Gibt es ein größtes bzw. kleinstes α sodass $R(\alpha)$ bedingt konvergent aber nicht absolut konvergent ist? Geben Sie die Zahlenwerte an bzw. begründen Sie, warum es keine geben kann.

$\boxed{2\text{ P.}}$ (Teil F) Gibt es ein größtes bzw. kleinstes α sodass $R(\alpha)$ weder bedingt noch absolut konvergent ist? Geben Sie die Zahlenwerte an bzw. begründen Sie, warum es keine geben kann.

Aufgabe III .... *21 Punkte*

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil A) Welche der drei Symbole $\Leftarrow, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ liefern eine wahre Aussage? (Bei Äquivalenz ist $\Leftrightarrow$ einzutragen)

(i). f, g beide stetig an x_0 ...... $f + g$ stetig an x_0

(ii). f stetig an x_0 ...... f folgenstetig an x_0

(iii). f beschränkt auf $[a, b]$ ...... f stetig auf $[a, b]$

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil B) Wie lautet der Satz vom Maximum für stetige reelle Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$?

$\boxed{\text{3 P.}}$ (Teil C) Zeigen Sie mit einem Beispiel, dass der Satz vom Maximum für stetige reelle Funktionen und offene Intervalle $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *nicht* zu gelten braucht.

$\boxed{\text{3 P.}}$ (Teil D) Zeigen Sie mit einem Beispiel, dass der Satz vom Maximum für unstetige reelle Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *nicht* zu gelten braucht.

$\boxed{\text{3 P.}}$ (Teil E) Zeigen Sie mit einem Beispiel, dass der Satz vom Maximum für unstetige reelle Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dennoch *gelten kann.*

Aufgabe IV . . . . *20 Punkte*

$\boxed{\text{5 P.}}$ (Teil A) Wie lautet der Mittelwertsatz der Differentialrechnung?

$\boxed{\text{3 P.}}$ (Teil B) Die ,,Ableitungsregel" $(f \circ g)'(x) = f' \circ g'(x)$ ist falsch. Zeigen Sie das anhand eines Beispiels.

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil C) Wie lautet die korrekte Version der Ableitungsregel aus Teil B? Überprüfen Sie die Richtigkeit mit Hilfe Ihres Gegenbeispiels aus Teil B.

$\boxed{\text{3 P.}}$ (Teil D) Angenommen die Ableitung einer bijektiven Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lautet $f'(x) = \frac{\cos(\pi x)}{1+\sin^2(2\pi x)}$ und $f(1) = 0$. Wie lautet die Ableitung der Umkehrfunktion $f^{(-1)}$ an der Stelle $x = 0$?

$\boxed{\text{3 P.}}$ (Teil E) Angenommen die Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lautet wieder $f'(x) = \frac{\cos(\pi x)}{1+\sin^2(2\pi x)}$ und $f(1) = 0$. Wie lautet die *Gleichung* der Tangente an den Funktionsgraphen von f im Punkt $x = 1$?

$\boxed{\text{2 P.}}$ (Teil F) Angenommen eine (mindestens viermal) differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt an der Stelle $x = 1$ die Ableitungen $f'(1) = f''(1) = f'''(1) = 0$ und $f''''(1) > 1$. Was können Sie daraus für die Stelle $x = 1$ schließen?

Aufgabe V . . . . *18 Punkte*

6 P. (Teil A) Finden Sie eine konkrete Stammfunktion von $f(x) = 2\sin x \cdot \cos x$, indem Sie $y = \sin x$ substituieren. Skizzieren Sie Ihr Ergebnis.

---

4 P. (Teil B) Finden Sie eine konkrete Stammfunktion von $f(x) = 2\sin x \cdot \cos x$ indem Sie die Identität $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$ verwenden. Skizzieren Sie Ihr Ergebnis.

---

2 P. (Teil C) Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt insbesondere, dass sich die Stammfunktionen aus Teil A und Teil B nur um eine Konstante unterscheiden können. Wie lautet hier der eindeutige Zahlenwert dieser Konstante?

---

4 P. (Teil D) Berechnen Sie den Wert des bestimmten Integrals $F(x) = \int_0^x \operatorname{sgn} t \,\mathrm{d}t$ mit $\mathbb{R}$ und skizzieren Sie $F(x)$.

---

2 P. (Teil E) Ist $F(x)$ aus Teil D eine Stammfunktion von $f(x) = \operatorname{sgn} x$? Wenn ja, machen Sie die Probe! Wenn nein, argumentieren Sie, warum nicht!

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.