Prüfung aus Mathematik 2 für BI

am 20. Juni 2008

Zuname: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. Sei

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2z \\ 2y \\ 2x \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 2xy \\ 2xy \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Wann sind k Vektoren im $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig, $k = 1, 2, 3, 4$? An welchen Stellen (x, y, z) sind $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ linear unabhängig?

   (b) Was ist ein Gradientenfeld, bzw. eine Potentialfunktion? Beweisen Sie, daß $\boldsymbol{w}$ kein, bzw. $\boldsymbol{v}$ ein Gradientenfeld ist und berechnen Sie die Potentialfunktion von $\boldsymbol{v}$. Was für einen Wert hat daher das Kurvenintegral über $\boldsymbol{v}$ von dem Punkt $(1, 1, 1)$ zu (π, π, π), inwieweit hängt dieser Wert von der Form der Kurve ab?

   (c) Berechnen Sie div$\boldsymbol{v}$. Geben Sie den Integralsatz von Gauss an. Was liefert daher das Oberflächenintegral von $\boldsymbol{v}$ über den Rand eines Würfels, der Volumen 17 hat?

2. Es sei $f(x, y) = x^2 e^{-y} - 1$.

   (a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f!
   (Inlusive Skizze für $-3 \leq x \leq 3$, z.B liegt $(-1, 0)$ auf der Kurve)

   (b) Bestimmen Sie Art und Lage der Nullstellen von (f_x, f_y).

   (c) Bestimmen Sie (alle 4) Minima und Maxima von f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 3$.

   (d) Entwickeln Sie f in eine Taylorreihe bis zum zweiten Grad um den Punkt $(1, 2)$. Geben Sie daraus die Tangentialebene und den Normalvektor im Punkt $(1, 2)$ an.

3. (a) Lösen Sie das Eigenwertproblem

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0$$

   unter den Randbedingungen $X(0) = X(1) = 0$.

   (b) Was bedeutet es, daß die Eigenfunktionen eines Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblems auf dem Intervall $[a, b]$ aufeinander *orthogonal* stehen? Geben Sie diese Orthogonalitätsrelationen im speziellen für die unter a) erhaltenen Eigenfunktionen an.

   (c) Sei m die letzte Ziffer Ihrer Matrikelnummer, $m =$ .... Lösen Sie die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = (m + 1)^2 u_{xx}$$

   unter den Randbedingungen $u(0, t) = u(1, t) = 0, \ u(x, 0) = \sin(17\pi x), \ x \in [0, 1]$.