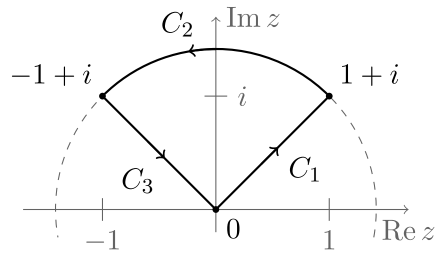
Prüfung – Mathematik 3 für MB, WIMB und VT – WS 2021/22
TU Wien, 18. Jänner 2022.

1. Gegeben seien die Abbildung $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$f(x+iy) = e^x \sin y - i\, e^x \cos y,$$

sowie die folgenden Integrationswege C_1, C_2 und C_3:



   (a) Zeigen Sie, dass die Abbildung f holomorph ist.
   (b) Formulieren Sie den Integralsatz von Cauchy.
   (c) Geben Sie eine Parametrisierung $z_2(t)$ der Kurve C_2 an.
   (d) Bestimmen Sie das Kurvenintegral über den geschlossenen Weg $C := C_1 + C_2 + C_3$,

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z.$$

   Begründen Sie Ihre Lösung!

5 Punkte (2+1+1+1)

2. Wir betrachten das Sturm–Liouville Eigenwertproblem

$$y''(x) + \lambda(1+x)y(x) = 0, \qquad y(0) = y(1) = 0. \qquad \text{(SL-EWP)}$$

   (a) Definieren Sie das zum SL-EWP gehörige innere Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und finden Sie $a \in \mathbb{R}$, sodass die Funktionen $f(x) = 1$ und $g(x) = a\,x - 5$ orthogonal aufeinander stehen.
   (b) Gibt es Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$, die nicht beide 0 sind, sodass $a\,x + b$ orthogonal auf den von $\{1, x\}$ aufgespannten Unterraum U steht? Begründen Sie Ihre Antwort.
   (c) Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $h(0) = h(1) = 0$. Weiters sei $e_0, e_1, \ldots$ ein zu SL-EWP gehöriges Orthonormalsystem von Eigenfunktionen und seien $c_0, c_1, \ldots \in \mathbb{R}$ gegeben durch $c_n = \langle e_n, h \rangle$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 = \|h\|^2$$

   gilt.
   Hinweis: Begründen Sie, dass $\lim_{m\to\infty} \|h - \sum_{n=0}^{m} c_n e_n\| = 0$ und zeigen Sie, dass

$$\left\langle h - \sum_{n=0}^{m} c_n e_n, h - \sum_{n=0}^{m} c_n e_n \right\rangle = \|h\|^2 - \sum_{n=0}^{m} c_n^2.$$

5 Punkte (2+1+2)

3. Bestimmen Sie eine Lösung der folgenden Differentialgleichung mithilfe der Laplacetransformation:

$$y''(t) + 3y(t) = -\sin(2t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$$

5 Punkte

4. Gegeben ist die Differentialgleichung

$$2u_x + xu_y = 0.$$

   (a) Bestimmen Sie die Charakteristiken der Differentialgleichung.

   (b) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

   (c) Entscheiden Sie, ob die Differentialgleichung eine Lösung bestitzt, die $u(x, y = \frac{x^2}{4}) = x$ erfüllt und schreiben Sie eine solche Lösung gegebenenfalls explizit an.

5 Punkte (2+2+1)

Notenschlüssel: S1: 17,5-20 Punkte; U2: 15-17 Punkte; B3: 12,5-14,5 Punkte; G4: 10-12 Punkte; N5: 0-9,5 Punkte