Prüfung – Mathematik 3 für MB, WIMB und VT – WS 2021/22
TU Wien (online), 3. März 2022.

1. (a) Bestimmen Sie alle Polstellen in $\mathbb{C}$, die Ordnungen der Polstellen, sowie die dazugehörigen Residuen von
$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}.$$
   (b) Formulieren Sie den Residuensatz.
   (c) Die Kurve C sei durch $z(t) = 1 + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ parametrisiert. Bestimmen Sie das Kurvenintegral
$$\oint_C \left(\frac{5\,i}{(1-z)^2} + 3\,z^2 \right) \mathrm{d}z.$$
   Begründen Sie Ihre Lösung!

5 Punkte (2+1+2)

2. Auf dem Intervall $[0, 2)$ ist die Funktion
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ x-3 & \text{für } 1 \leq x < 2, \end{cases}$$
gegeben.
   (a) Bestimmen und skizzieren Sie die periodische Fortsetzung $\widetilde{f}(x)$ von $f(x)$ auf dem Intervall $[-2, 2)$.
   (b) Bestimmen Sie die Fourierreihe von $\widetilde{f}(x)$.
   (c) Was besagt der Satz von Dirichlet? Gegen welchen Wert konvergiert die Fourierreihe von $\widetilde{f}(x)$ im Punkt $x = 0$?

5 Punkte (1+3+1)

3. Bestimmen Sie eine Lösung der folgenden Differentialgleichung mithilfe der Laplacetransformation:
$$2y''(t) - y(t) = \sinh(t), \qquad y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

5 Punkte

4. Wir betrachten das Randwertproblem

$$u_{tt}(t,x) = u_{xx}(t,x), \qquad u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0, \quad u_t(0,x) = 0,$$

für $x \in [0,\pi]$ und $t \geq 0$.

(a) Der Separationsansatz $u(t,x) = T(t)X(x)$ führt auf das Sturm–Liouvillesche Eigenwertproblem

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X'(0) = X'(\pi) = 0.$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte λ_n und die dazugehörigen Eigenfunktionen X_n. Sie dürfen dabei annehmen, dass alle Eigenwerte $\lambda_n \leq 0$ sind.

(b) Mithilfe des Separationsansatzes und der Lösung aus (a) folgt weiters

$$T_n''(t) + n^2\, T_n(t) = 0, \quad T_n'(0) = 0,$$

für $n \in \mathbb{N}_0$. Bestimmen Sie die Funktionen $T_n(t)$ sowie die allgemeine Lösung

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n(X).$$

(c) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung des Randwertproblems, welche die Anfangsbedingung

$$u(0,x) = \cos(3x) + \cos(27x)$$

für $x \in [0,\pi]$ erfüllt.

5 Punkte (2+2+1)

Notenschlüssel: S1: 17,5-20 Punkte; U2: 15-17 Punkte; B3: 12,5-14,5 Punkte; G4: 10-12 Punkte; N5: 0-9,5 Punkte

---