Prüfung – Mathematik 3 für MB, WIMB und VT – WS 2021/22
TU Wien, 3. Mai 2022.

1. Berechnen Sie
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+16},$$
indem Sie wie folgt vorgehen.

   (a) Bestimmen Sie alle Polstellen von $f(z) = \dfrac{1}{z^4+16}$ in der oberen Halbebene.

   (b) Bestimmen Sie die Residuen von $f(z)$ an den einfachen Polstellen $2e^{i\frac{\pi}{4}}$ und $2e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

   (c) Zeigen Sie, dass
$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$
   wobei C_R eine mathematisch positiv durchlaufene Halbkreiskurve in der oberen Halbebene mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius R ist.

   (d) Formulieren Sie den Residuensatz.

   (e) Verwenden Sie (a)–(d) um zu zeigen, dass $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+16}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}$.

   Hinweis: $e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$, $e^{-i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$.

5 Punkte (1+1+1+1+1)

2. Wir betrachten das Sturm–Liouville Eigenwertproblem
$$(py')'(x) + q(x)y(x) + \lambda(1+x^2)y(x) = 0, \qquad y(0) = y(1) = 0, \tag{SL-EWP}$$
wobei $p, q : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen sind.

   (a) Definieren Sie das zum SL-EWP gehörige innere Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und finden Sie $a \in \mathbb{R}$, sodass die Funktionen $f(x) = 1$ und $g(x) = a + x$ orthogonal aufeinander stehen.

   (b) Gibt es Zahlen $b, c \in \mathbb{R}$, die nicht beide 0 sind, sodass $b\,x + c$ orthogonal auf den von $\{1, x\}$ aufgespannten Unterraum U steht? Begründen Sie Ihre Antwort.

   (c) Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $h(0) = h(1) = 0$. Weiters sei $e_1, e_2, \ldots$ ein zu SL-EWP gehöriges Orthonormalsystem von Eigenfunktionen. Für $m \in \mathbb{N}$ seien $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$ gegeben durch $c_k = \langle e_k, h\rangle$, $k \in \{1, \ldots, m\}$. Zeigen Sie, dass
$$\left\| h - \sum_{k=0}^{m} c_k e_k \right\|^2 = \|h\|^2 - \sum_{k=1}^{m} c_k^2.$$

   (d) Verwenden Sie (c) um den Grenzwert $\lim_{m\to\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{m} c_k^2$ zu bestimmen. Begründen Sie Ihre Antwort.

5 Punkte (2+1+1+1)

3. (a) Formulieren Sie den Satz über die Existenz von Laplacetransformierten.
   (b) Bestimmen Sie die Laplacetransformierte $F(s) := \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, $s > 0$, der Funktion
   $$f(t) = t\cos(2t).$$
   (c) Bestimmen Sie die Funktion $g(t)$, deren Laplacetransformation gegeben ist durch
   $$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s) = \frac{4s^2 + 6}{s^4 + 3s^2 - 4}$$
   für $s > 0$.

5 Punkte (1+1,5+2,5)

4. Gegeben ist die Differentialgleichung
   $$y^2 u_x + 2u_y = 0.$$
   (a) Bestimmen Sie die Charakteristiken der Differentialgleichung.
   (b) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.
   (c) Entscheiden Sie, ob die Differentialgleichung eine Lösung bestitzt, die $u(0, y) = e^y$ erfüllt und schreiben Sie eine solche Lösung gegebenenfalls explizit an.

5 Punkte (2+2+1)

Notenschlüssel: S1: 17,5-20 Punkte; U2: 15-17 Punkte; B3: 12,5-14,5 Punkte; G4: 10-12 Punkte; N5: 0-9,5 Punkte