Prüfung – Mathematik 3 für MB, WIMB und VT – WS 2021/22
TU Wien (online), 10. Juni 2022.

1. *Variante A*
   Wir betrachten das Sturm–Liouville Eigenwertproblem

$$y''(x) + \lambda(1+x)y(x) = 0, \qquad y'(0) = y(\pi/2) = 0. \tag{SL-EWP}$$

Weiters seien $e_0, e_1, \ldots$ ein zu SL-EWP gehöriges Orthonormalsystem von Eigenfunktionen mit Eigenwerten $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$. Zudem sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $f'(0) = f(\pi/2) = 0$ und schließlich seien $c_0, c_1, \ldots \in \mathbb{R}$ gegeben durch $c_n = \langle e_n, f \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das zu SL-EWP gehörige innere Produkt bezeichne.

(a) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?
Es gibt Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$, die nicht beide 0 sind, sodass $ax + b$ orthogonal auf den von $\{1, x\}$ aufgespannten Unterraum steht.
☐ *wahr* ☐ *falsch*

(b) Welches der folgenden Integrale ist sicher 0?
☐ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e_1(x)e_1(x)\,\mathrm{d}x$ ☐ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e_1(x)e_2(x)\,\mathrm{d}x$ ☐ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e_1(x)e_1(x)(1+x)\,\mathrm{d}x$
☐ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e_1(x)e_2(x)(1+x)\,\mathrm{d}x$

(c) Welchen Wert hat das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e_1(x)e_1(x)(1+x)\,\mathrm{d}x$?
☐ 0 ☐ 1 ☐ $\pi/2$

(d) Setzen Sie das fehlende Zeichen in folgende Aussage ein:
Es gilt $\|f - \sum_{n=0}^m c_n e_n\|$ ☐ $\|f - \sum_{n=0}^m d_n e_n\|$ für alle $d_0, \ldots, d_m \in \mathbb{R}$ mit $(d_0, \ldots, d_m) \neq (c_0, \ldots, c_m)$.
☐ $<$ ☐ $=$ ☐ $>$

(e) Welchen Wert hat $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2$?
☐ $\|f\|^2$ ☐ 0 ☐ 1

(f) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?
Zu jedem Eigenwert λ_i von SL-EWP gibt es einen Eigenwert λ_j, $i \neq j$, sodass λ_j konjugiert komplex zu λ_i ist.
☐ *wahr* ☐ *falsch*

(g) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?
Es gilt $\langle e_4, e_4 \rangle > 0$.
☐ *wahr* ☐ *falsch*

(h) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?
Es gibt Eigenfunktionen e_i und e_j, $i \neq j$, zum selben Eigenwert.
☐ *wahr* ☐ *falsch*

(i) Wie viele Eigenwerte λ_i erfüllen $|\lambda_i| > 5$?
☐ *keiner* ☐ *genau einer* ☐ *unendlich viele*

(j) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?
Der Ausdruck $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\mu e_3(x) - \cos(x))\,\mathrm{d}x$ wird maximal für $\mu = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e_3(x)\cos(x)(1+x)\,\mathrm{d}x$.
☐ *wahr* ☐ *falsch*

Variante B

Wir betrachten das Sturm–Liouville Eigenwertproblem

$$y''(x) + \lambda(1+x)y(x) = 0, \qquad y(0) = y'(\pi/2) = 0. \tag{SL-EWP}$$

Weiters seien $e_0, e_1, \ldots$ ein zu SL-EWP gehöriges Orthonormalsystem von Eigenfunktionen mit Eigenwerten $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$. Zudem sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $f(0) = f'(\pi/2) = 0$ und schließlich seien $c_0, c_1, \ldots \in \mathbb{R}$ gegeben durch $c_n = \langle e_n, f \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das zu SL-EWP gehörige innere Produkt bezeichne.

(a) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?
Funktionen der Form $ax + b$, mit $a, b \in \mathbb{R}$, nicht beide 0, stehen nie orthogonal auf den von $\{1, x\}$ aufgespannten Unterraum.
☐ *wahr* ☐ *falsch*

(b) Welches der folgenden Integrale ist sicher 1?
☐ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e_1(x)e_1(x)\,\mathrm{d}x$ ☐ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e_1(x)e_2(x)\,\mathrm{d}x$ ☐ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e_1(x)e_1(x)(1+x)\,\mathrm{d}x$
☐ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e_1(x)e_2(x)(1+x)\,\mathrm{d}x$

(c) Welchen Wert hat das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e_1(x)e_2(x)(1+x)\,\mathrm{d}x$?
☐ 0 ☐ 1 ☐ $\pi/2$

(d) Setzen Sie das fehlende Zeichen in folgende Aussage ein:
Es gilt $\|f - \sum_{n=0}^{m} d_n e_n\|$ ☐ $\|f - \sum_{n=0}^{m} c_n e_n\|$ für alle $d_0, \ldots, d_m \in \mathbb{R}$ mit $(d_0, \ldots, d_m) \neq (c_0, \ldots, c_m)$.
☐ $<$ ☐ $=$ ☐ $>$

(e) Welchen Wert hat $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2$?
☐ $\|f\|^2$ ☐ 0 ☐ 1

(f) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?
Zu jedem Eigenwert λ_i von SL-EWP gibt es einen Eigenwert λ_j, $i \neq j$, sodass λ_j konjugiert komplex zu λ_i ist.
☐ *wahr* ☐ *falsch*

(g) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?
Es gilt $\langle e_5, e_5 \rangle < 0$.
☐ *wahr* ☐ *falsch*

(h) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?
Es gibt keine Eigenfunktionen e_i und e_j, $i \neq j$, zum selben Eigenwert.
☐ *wahr* ☐ *falsch*

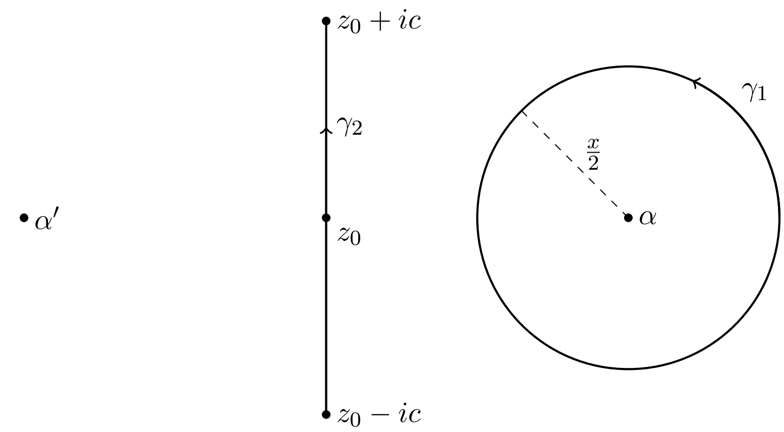
(i) Wie viele Eigenwerte λ_i erfüllen $|\lambda_i| > 7$?
☐ *keiner* ☐ *genau einer* ☐ *unendlich viele*

(j) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?
Der Ausdruck $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\mu e_4(x) - \sin(x))\,\mathrm{d}x$ wird minimal für $\mu = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e_4(x)\sin(x)(1+x)\,\mathrm{d}x$.
☐ *wahr* ☐ *falsch*

10 Punkte (je 1)

2. Es seien $z_0 \in \mathbb{C}$ und $c > 0$ beliebig. Weiters seien $\alpha = z_0 + x$ und $\alpha' = z_0 - x$ für $x > 0$.

   (a) Finden Sie Parametrisierungen für die Wege γ_1 und γ_2, welche durch die folgende Skizze gegeben sind.



   (b) Berechnen Sie

$$\oint_{\gamma_1} \frac{1}{z-\alpha}\,\mathrm{d}z \qquad \text{und} \qquad \oint_{\gamma_1} \frac{1}{z-\alpha'}\,\mathrm{d}z.$$

   Begründen Sie Ihre Lösung und geben Sie alle verwendeten Sätze an!

   (c) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x\to 0^+} \int_{\gamma_2} \left(\frac{1}{z-\alpha} - \frac{1}{z-\alpha'} \right) \mathrm{d}z = -2\pi i.$$

   Hinweis: Formelsammlung zu Stammfunktionen einiger häufig auftretender Funktionen (insb. arctan als Stammfunktion).
   $\lim_{s\to+\infty} \arctan(s) = \frac{\pi}{2}$ und $\arctan(-s) = -\arctan(s)$.

10 Punkte (2+4+4)

3. (a) Formulieren Sie den Satz über die Existenz von Laplacetransformierten.

   (b) Bestimmen Sie die Laplacetransformierte $F(s) := \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, $s > 0$, der Funktion

$$f(t) = t^2 \sin(2t).$$

   (c) Bestimmen Sie die Funktion $g(t)$, deren Laplacetransformation gegeben ist durch

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s) = \frac{1}{(s^2+9)^2}$$

   für $s > 0$.

   Hinweis: Formelsammlung zur Laplacetransformation sowie zu trigonometrischen Funktionen.

10 Punkte (2+4+4)

4. Gegeben ist die Differentialgleichung

$$xu_x(x,y) + yu_y(x,y) = 0,$$

für $x > 0$ und $y > 0$.

(a) Ist die Differentialgleichung homogen?

(b) Zeigen Sie mithilfe der Methode der Charakteristiken, dass eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung von der Form $u(x,y) = f(\frac{x}{y})$ ist, wobei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine beliebige stetig differenzierbare Funktion ist.

(c) Entscheiden Sie, ob die Differentialgleichung eine Lösung besitzt, welche $u(1-y,y) = y$ für $y > 0$ erfüllt und schreiben Sie eine solche Lösung gegebenenfalls explizit an. Begründen Sie Ihre Antwort!

(d) Bestimmen Sie eine möglichst allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$xu_x(x,y) + yu_y(x,y) = u(x,y)$$

für $x > 0$ und $y > 0$.
Hinweis: Benutzen Sie die Variablensubstitution $X(x,y) = \frac{y}{x}$ und $Y(x,y) = y$ und betrachten Sie $u(x,y) = U(X(x,y), Y(x,y))$.

10 Punkte (1+4+2+3)

Notenschlüssel: S1: 35-40 Punkte; U2: 30-34 Punkte; B3: 25-29 Punkte; G4: 20-24 Punkte; N5: 0-19 Punkte