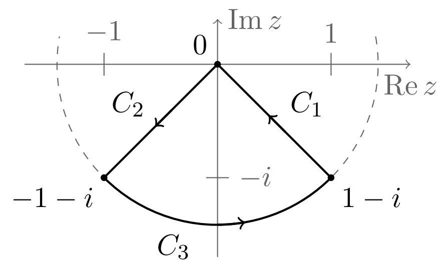
Prüfung – Mathematik 3 für MB, WIMB und VT – WS 2021/22
TU Wien, 14. Oktober 2022.

1. Gegeben seien die Abbildung $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$f(x+iy) = e^y \sin x + i\, e^y \cos x,$$

sowie die folgenden Integrationswege C_1, C_2 und C_3:



   (a) Zeigen Sie, dass die Abbildung f holomorph ist.
   (b) Formulieren Sie den Integralsatz von Cauchy.
   (c) Geben Sie eine Parametrisierung $z_3(t)$ der Kurve C_3 an.
   (d) Bestimmen Sie das Kurvenintegral über den geschlossenen Weg $C := C_1 + C_2 + C_3$,

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z.$$

   Begründen Sie Ihre Lösung!

10 Punkte (4+2+2+2)

2. Auf dem Intervall $[0, 2)$ ist die Funktion

$$f(x) = 2x - 1$$

gegeben.

   (a) Bestimmen und skizzieren Sie die periodische Fortsetzung $\widetilde{f}(x)$ von $f(x)$ auf dem Intervall $[-2, 2)$.
   (b) Bestimmen Sie die Fourierreihe von $\widetilde{f}(x)$.
   (c) Was besagt der Satz von Dirichlet? Gegen welchen Wert konvergiert die Fourierreihe von $\widetilde{f}(x)$ im Punkt $x = 0$?

10 Punkte (2+6+2)

3. Bestimmen Sie eine Lösung der folgenden Differentialgleichung mithilfe der Laplacetransformation:

$$2y''(t) - y(t) = \sinh(t), \qquad y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

10 Punkte

4. Gegeben ist die Differentialgleichung

$$2u_x + xu_y = 0.$$

   (a) Welche Eigenschaften hat die partielle Differentialgleichung? (linear, Ordnung, homogen)
   (b) Zeigen Sie mithilfe der Methode der Charakteristiken, dass eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung von der Form $u(x, y) = f(4y - x^2)$ ist, wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige stetig differenzierbare Funktion ist.
   (c) Entscheiden Sie, ob die Differentialgleichung eine Lösung besitzt, welche $u(x, y = \frac{x^2}{4}) = x$ erfüllt und schreiben Sie eine solche Lösung gegebenenfalls explizit an. Begründen Sie Ihre Antwort.

10 Punkte (3+5+2)

Notenschlüssel: S1: 35-40 Punkte; U2: 30-34 Punkte; B3: 25-29 Punkte; G4: 20-24 Punkte; N5: 0-19 Punkte

---