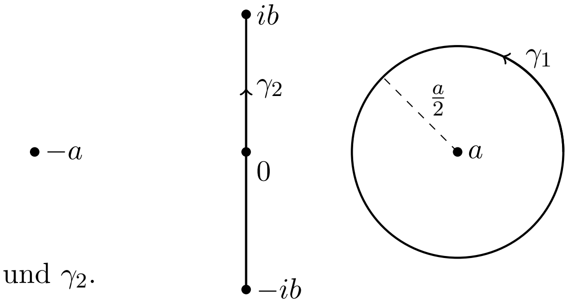
Prüfung – Mathematik 3 für MB, WIMB und VT – WS 2021/22
TU Wien, 25. November 2022.

1. Gegeben seien $a, b > 0$ sowie die folgenden Integrationswege γ_1 und γ_2:



   (a) Finden Sie Parametrisierungen für die Wege γ_1 und γ_2.

   (b) Formulieren Sie den Integralsatz von Cauchy.

   (c) Formulieren Sie den Residuensatz.

   (d) Berechnen Sie

$$\oint_{\gamma_1} \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z \qquad \text{und} \qquad \oint_{\gamma_1} \frac{1}{z+a}\,\mathrm{d}z.$$

   Begründen Sie Ihre Lösungen und geben Sie alle verwendeten Sätze an!

10 Punkte (2+2+2+4)

2. Wir betrachten das Sturm–Liouville Eigenwertproblem

$$y''(x) + \lambda(1+x)y(x) = 0, \qquad y'(0) = y(\pi/2) = 0. \tag{SL-EWP}$$

Weiters seien $e_0, e_1, \dots$ ein zu (SL-EWP) gehöriges Orthonormalsystem von Eigenfunktionen mit Eigenwerten $\lambda_0, \lambda_1, \dots$. Zudem sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $f'(0) = f(\pi/2) = 0$ und schließlich seien $c_0, c_1, \dots \in \mathbb{R}$ gegeben durch $c_n = \langle e_n, f\rangle$, $n \in \mathbb{N}$, wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das zu SL-EWP gehörige innere Produkt bezeichne.

   (a) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?
   Es gibt Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$, die nicht beide 0 sind, sodass $ax+b$ orthogonal auf den von $\{1, x\}$ aufgespannten Unterraum steht.

   ◯ wahr ◯ falsch

   (b) Welche der folgenden Aussagen sind wahr? *(Mehrere Antworten möglich)*

   ☐ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e_1(x)e_1(x)\,\mathrm{d}x = 1$ ☐ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e_3(x)f(x)(1+x)\,\mathrm{d}x = c_3$ ☐ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e_5(x)e_5(x)\,\mathrm{d}x < 0$

   ☐ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e_1(x)e_2(x)(1+x)\,\mathrm{d}x = 0$ ☐ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e_3(x)f(x)(1+x)\,\mathrm{d}x = 0$ ☐ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e_9(x)e_9(x)(1+x)\,\mathrm{d}x > 0$

   (c) Welche der folgenden Aussagen sind wahr? *(Mehrere Antworten möglich)*

   ☐ $\|f - \sum_{n=0}^m c_n e_n\| > \|f - \sum_{n=0}^m d_n e_n\|$ für alle $d_0, \dots, d_m \in \mathbb{R}$ mit $(d_0, \dots, d_m) \neq (c_0, \dots, c_m)$.

   ☐ Wenn $\|f - \sum_{n=0}^m c_n e_n\| = \|f - \sum_{n=0}^m d_n e_n\|$, dann folgt $(d_0, \dots, d_m) = (c_0, \dots, c_m)$.

   ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 = 1$

Auf dem Intervall $[-2,2)$ sei eine stetige Funktion $g(x)$ gegeben. Die Fourierreihe G, welche der Funktion g zugeordnet ist, ist von der Form

$$g(x) \sim G(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)$$

mit $a_0, b_1, b_2, \ldots \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$. Weiters sei $\tilde{g}(x)$ die periodische Fortsetzung von $g(x)$ auf dem Intervall $[-8,8)$.

(d) Welche der folgenden Aussagen sind wahr? *(Mehrere Antworten möglich)*

- ☐ Die Funktion g ist ungerade.
- ☐ Die Funktion g ist gerade.
- ☐ Es gilt $g(0) \neq 0$.
- ☐ Es gilt $\tilde{g}(0) = 0$.
- ☐ Es gilt $\tilde{g}(-4) = g(-2)$.
- ☐ Es gilt $\tilde{g}(4) = \frac{a_0}{2}$.

(e) Welche der folgenden Aussagen sind wahr? *(Mehrere Antworten möglich)*

- ☐ $\int_{-2}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$
- ☐ $\int_{-2}^{2} \big(g(x)\big)^2\,\mathrm{d}x = 0$
- ☐ $\int_{-2}^{2} g(x)\cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right)\mathrm{d}x = 0$
- ☐ $\int_{-2}^{2} \tilde{g}(x)\cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right)\mathrm{d}x = 0$

(f) Welche der folgenden Aussagen über $G(x)$ sind sicher wahr? *(Mehrere Antworten möglich)*

- ☐ $G(x)$ ist stetig auf $[-2,2)$
- ☐ $G(x)$ ist stetig auf $[-8,8)$
- ☐ $G(3) = G(-1)$.
- ☐ $G(3) = \tilde{g}(3)$.

10 Punkte (1+2+1+2+2+2)

3. (a) Formulieren Sie den Satz über die Existenz von Laplacetransformierten.

(b) Beweisen Sie die folgende Formel für die Laplacetransformation einer stetig differenzierbaren Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, deren Lapalacetransformierte $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ für $s > c$ existiert:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - f(0) \qquad \text{für } s > c.$$

(c) Bestimmen Sie die Funktion $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, deren Laplacetransformation durch

$$\mathcal{L}\{g(t)\}(s) = \frac{1}{s(s-1)}, \qquad s > 1,$$

gegeben ist.

10 Punkte (2+4+4)

4. Wir betrachten das Randwertproblem

$$u_{tt}(t,x) = u_{xx}(t,x), \qquad u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0, \quad u_t(0,x) = 0,$$

für $x \in [0,\pi]$ und $t \geq 0$.

(a) Der Separationsansatz $u(t,x) = T(t)X(x)$ führt auf das Sturm–Liouvillesche Eigenwertproblem

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X'(0) = X'(\pi) = 0.$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte λ_n und die dazugehörigen Eigenfunktionen X_n. Sie dürfen dabei annehmen, dass alle Eigenwerte $\lambda_n \leq 0$ sind.

(b) Mithilfe des Separationsansatzes und der Lösung aus (a) folgt weiters

$$T_n''(t) + n^2\, T_n(t) = 0, \quad T_n'(0) = 0,$$

für $n \in \mathbb{N}_0$. Bestimmen Sie nun die Funktionen $T_n(t)$ sowie die allgemeine Lösung

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n(X).$$

(c) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung des Randwertproblems, welche die Anfangsbedingung

$$u(0,x) = \cos(4x) + \cos(18x)$$

für $x \in [0, \pi]$ erfüllt.

10 Punkte (4+4+2)

Notenschlüssel: S1: 35-40 Punkte; U2: 30-34 Punkte; B3: 25-29 Punkte; G4: 20-24 Punkte; N5: 0-19 Punkte