Prüfung – Mathematik 3 für MB, WIMB und VT – WS 2021/22
TU Wien, 13. Jänner 2023.

1. (a) Bestimmen Sie alle Polstellen in $\mathbb{C}$, die Ordnungen der Polstellen, sowie die dazugehörigen Residuen von
$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}.$$
(b) Formulieren Sie den Residuensatz.
(c) Die Kurve C sei durch $z(t) = 1 + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ parametrisiert. Bestimmen Sie das Kurvenintegral
$$\oint_C \left(\frac{13\, i}{(1-z)^3} + 23\, z^2 \right) \mathrm{d}z.$$
Begründen Sie Ihre Lösung und geben Sie alle verwendeten Sätze an!

10 Punkte (4+2+4)

2. Wir betrachten das Sturm–Liouville Eigenwertproblem
$$(py')'(x) + q(x)y(x) + \lambda(1+x^2)y(x) = 0, \qquad y(0) = y(1) = 0, \tag{SL-EWP}$$
wobei $p, q : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen sind.
(a) Definieren Sie das zum SL-EWP gehörige innere Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, d.h. geben Sie explizit an, wie $\langle f, g \rangle$ für zwei Funktionen $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ berechnet wird. Finden Sie weiters $a \in \mathbb{R}$, sodass die Funktionen $f(x) = 1$ und $g(x) = a + x$ orthogonal aufeinander stehen.
(b) Gibt es Zahlen $b, c \in \mathbb{R}$, die nicht beide 0 sind, sodass $b\,x + c$ orthogonal auf den von $\{1, x\}$ aufgespannten Unterraum U steht? Begründen Sie Ihre Antwort.
(c) Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $h(0) = h(1) = 0$. Weiters sei $e_0, e_1, \ldots$ ein zu SL-EWP gehöriges Orthonormalsystem von Eigenfunktionen. Für $m \in \mathbb{N}$ seien $c_0, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$ gegeben durch $c_k = \langle e_k, h \rangle$, $k \in \{0, \ldots, m\}$. Zeigen Sie, dass
$$\left\| h - \sum_{k=0}^{m} c_k e_k \right\|^2 = \|h\|^2 - \sum_{k=0}^{m} c_k^2.$$
(d) Verwenden Sie (c) um den Grenzwert $\lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} c_k^2$ zu bestimmen. Begründen Sie Ihre Antwort.

10 Punkte (4+2+2+2)

3. **Multiple Choice/Single Choice Aufgabe**
Bei dieser Aufgabe ist es nicht notwendig, dass Sie Ihre Lösungen begründen. Achten Sie jedoch darauf, dass Ihre Antworten eindeutig gekennzeichnet sind. Jede Teilfrage wird getrennt bewertet - insbesondere gibt es bei falschen Antworten keine negativen Punkte auf Teilfragen.

Teil 1 – Multiple Choice

Auf dem Intervall $[-3, 3)$ sei eine stetige Funktion $g(x)$ gegeben. Die Fourierreihe G, welche der Funktion g

zugeordnet ist, ist von der Form

$$g(x) \sim G(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{3}\right)$$

mit $a_0, a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$. Weiters sei $\tilde{g}(x)$ die periodische Fortsetzung von $g(x)$ auf dem Intervall $[-9, 9)$.

(a) Welche der folgenden Aussagen sind sicher wahr? *(Mehrere Antworten möglich)*

- ☐ Die Funktion g ist ungerade.
- ☐ $\tilde{g}(-6) = g(-3)$.
- ☐ Die Funktion g ist gerade.
- ☐ $\tilde{g}(6) = g(0)$.

(b) Welche der folgenden Aussagen sind wahr? *(Mehrere Antworten möglich)*

- ☐ $\int_{-3}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
- ☐ $\int_{-3}^{3} g(x) \sin\left(\frac{5\pi x}{3}\right) \mathrm{d}x = 0$.
- ☐ $\int_{-3}^{3} \big(g(x)\big)^2\,\mathrm{d}x = 0$.
- ☐ $\int_{-3}^{3} \tilde{g}(x) \sin\left(\frac{5\pi x}{3}\right) \mathrm{d}x = 0$.

(c) Welche der folgenden Aussagen über $G(x)$ sind sicher wahr? *(Mehrere Antworten möglich)*

- ☐ $G(x)$ ist stetig auf $[-3, 3)$.
- ☐ $G(4) = G(-2)$.
- ☐ $G(x)$ ist stetig auf $[-9, 9)$.
- ☐ $G(0) = 0$.

6 Punkte (2+2+2)

Teil 2 – Single Choice

Sei $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $F : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ die Laplacetransformierte von f für ein passendes $a \in \mathbb{R}$, d.h. $F = \mathcal{L}\{f\}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(d) Wenn f auf jedem Intervall der Form $[0, b]$ integrierbar ist und hoöchstens exponentielles Wachstum hat, dann gilt $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$.

◯ wahr ◯ falsch

(e) Um die Laplacetransformierte von f' (erste Ableitung von f) zu berechnen, benötigt man Kenntnis über f'' (zweite Ableitung).

◯ wahr ◯ falsch

(f) Zur Berechnung von F (für gegebenes f) benötigt man den Residuensatz.

◯ wahr ◯ falsch

(g) Ist $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ eine weitere Funktion mit Laplacetransformierter $G : [b, +\infty) \to \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, so ist $s \mapsto F(s)G(s)$ die Laplacetransformierte von $t \mapsto f(t)g(t)$.

◯ wahr ◯ falsch

4 Punkte (1+1+1+1)

Aufgabe 3 Gesamt: 10 Punkte (6+4)

4. Gegeben ist die Differentialgleichung

$$xu_x(x,y) + yu_y(x,y) = 0,$$

für $x > 0$ und $y > 0$.

(a) Ist die Differentialgleichung linear? Sind die Koeffizienten der Differentialgleichung konstant?

(b) Zeigen Sie mithilfe der Methode der Charakteristiken, dass eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung von der Form $u(x,y) = f(\frac{x}{y})$ ist, wobei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine beliebige stetig differenzierbare Funktion ist.

(c) Entscheiden Sie, ob die Differentialgleichung eine Lösung besitzt, welche $u(1-y,y) = y$ für $y > 0$ erfüllt und schreiben Sie eine solche Lösung gegebenenfalls explizit an. Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Bestimmen Sie eine möglichst allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$xu_x(x,y) + yu_y(x,y) = u(x,y)$$

für $x > 0$ und $y > 0$.
Hinweis: Benutzen Sie die Variablensubstitution $X(x,y) = \frac{y}{x}$ und $Y(x,y) = y$ und verwenden Sie den Ansatz $u(x,y) = U(X(x,y), Y(x,y))$.

10 Punkte (2+4+2+2)