Probeprüfung, 26. 5. 2011

1. (i) Sei $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ein allgemeines Gleichungssystem mit einer $m \times n$ Matrix A. Wie ist der Rang von A und $(A|b)$ definiert? Was läßt sich über die Lösbarkeit des Gleichungssytems sagen, wenn der Rang von A gleich dem Rang von $(A|\boldsymbol{b})$ ist?
   (ii)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 &= -1 \\ 2x_2 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= -3 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 0 \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 5 \end{aligned}$$
   Geben Sie die allgemeine Lösung dieses Gleichungssystems an. Sei A die Systemmatrix und $\boldsymbol{b}$ der Störvektor des obigen Gleichungssystems. Bestimmen Sie den Rang von A und den Rang von $(A|\boldsymbol{b})$.

2.
$$u(x,y) = 4 - x^2 - y^2,\ v(x,y) = x\,y$$
   (i) Wo nimmt u auf $\mathbb{R}^2$ Maxima und Minima an?
   (ii) Berechnen Sie :
$$\int_{x^2+y^2\leq 1} u(x,y)\,dx\,dy$$
   (iii) Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen von u an der Stelle $(x_0, y_0) = (0,1)$ an.
   (iv) Berechnen Sie die Funktionaldeterminate $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.

3.
$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 3x^2 + y + yz \\ x + xz \\ xy \end{pmatrix}$$
   (i) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{v}$ ein Potentialfeld ist und berechnen Sie eine Potentialfunktion von $\boldsymbol{v}$.
   (ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral
$$\int_C \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x},$$
   wobei C gegeben ist durch
$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} 3\sin(\pi t) \\ \cos(\pi t) \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in [0,1].$$

(iii) Wie ist allgemein das Kurvenintegral $\int_C \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$ für ein Vektorfeld $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ und eine durch $\boldsymbol{x}(t)$, $t \in [0,1]$, bestimmte Kurve C definiert?

4.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x},\ A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Man gebe die Eigenwerte und Eigenvektoren von A an.
(ii) Man gebe die allgemeine Lösung dieses Differentialgleichungssystems an.
(iii) Sei $\boldsymbol{x}(0) = \binom{1}{2}$. Man gebe die Lösung zu dieser Anfangsbedingung an.
(iv) Wann ist die Lösung eines Differentialgleichungssystems asymptotisch stabil (Definition)? Sind hier die Lösungen asymptotisch stabil?

5.

$$y'' - y = e^{-x}$$

(i) Gegeben Sie ein Fundamentalssystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung an!
(ii) Geben Sie eine Partikulärlösung an!
(iii) Sei zusätzlich die Anfangsbedingung $y(0) = y'(0) = 0$ gegeben. Geben Sie alle Lösungen dieses Anfangswertproblems an!
(iv) Lösen Sie das Anfangswertproblem aus (iii) mit Laplace-Transformation!