1. Übungsblatt - Komplexe Analysis - SS 2012

1. Es bezeichne $\mathbb{R}[x]$ den Polynomring über $\mathbb{R}$. Rechnen Sie nach, dass der Quotientenring $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ ein Körper ist und geben Sie einen Isomorphismus zwischen $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ und $\mathbb{C}$ an.

2. Zeigen Sie, dass durch den Ring aller 2×2 Matrizen der Gestalt

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \tag{1}$$

   mit Einträgen $a, b \in \mathbb{R}$ ein zu $\mathbb{C}$ isomorpher Körper entsteht und geben Sie alle stetigen Körper-Automorphismen an!

3. Zeigen Sie, dass durch den Ring aller 2×2 Matrizen der Gestalt

$$\begin{pmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \tag{2}$$

   mit Einträgen $z, w \in \mathbb{C}$ ein Schiefkörper entsteht. (Dieser Schiefkörper ist isomorph zu $\mathbb{H}$, dem Schiefkörper der Quaternionen)

   Wenn Sie motiviert sind: Zeigen Sie, dass jeder stetige Schiefkörper-Automorphismus von $\mathbb{H}$ ein innerer Automorphismus ist.

4. (a) Bestimmen Sie alle Perioden der komplexen Exponentialfunktion $\exp(z)$. Bestimmen Sie dazu alle $z \in \mathbb{C}$ mit $e^z = 1$. (Falls Sie dazu die Euler'schen Formeln verwenden, begründen Sie diese bitte!)

   (b) Berechnen Sie für $z_0 \in \mathbb{C}$ das vollständige Urbild $\exp^{-1}[\{z_0\}] = \{z \in \mathbb{C} : e^z = z_0\}$.