Prüfung aus Komplexer Analysis

am 14. Oktober 2016

Zuname: ....

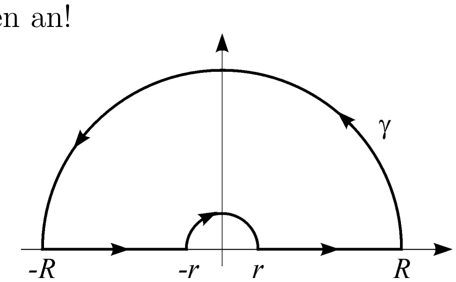
Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. (i) Sei a ein Pol n-ter Ordnung f. Geben Sie eine Formel zur Berechnung des Residuums von f bei a an und beweisen Sie diese Formel!
   (ii) Zeigen Sie, dass $\int_o^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$, indem Sie $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ über die Kurve γ integrieren. Geben Sie dabei alle Abschätzungen an!



2. (i) Es seien $f_n : G \to \mathbb{C}$ holomorph, wobei G ein Gebiet ist. Zeigen Sie, wenn f_n kompakt gegen f konvergiert, dann ist die Grenzfunktion f holomorph.
   (ii) Seien $g_n : G \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen und $g_n \to g$ kompakt. Zeigen Sie: Haben die g_n nur reelle Nullstellen, dann hat g nur reelle Nullstellen oder $g \equiv 0$. Geben Sie eine kompakt konvergente Folge von ganzen Funktionen an, die nur reelle Nullstellen haben und gegen $g \equiv 0$ konvergieren.

3. Sei f holomorph auf dem beschränkten Gebiet G. Zeigen Sie, dass die Maxima von
$$(\operatorname{Re} f)^4 + (\operatorname{Im} f)^4$$
   am Rand von G angenommen werden.

4. a) Sei X ein topologischer Hausdorffraum. Definieren Sie die Begriffe *Karte*, *Atlas* und *analytischer Atlas* auf X!
   b) Sei $f : M \to \mathbb{C}$ holomorph auf einer zusammenhängenden und kompakten Riemannschen Fläche M. Zeigen Sie, dass f konstant ist.