1. Übungsblatt - Mathematik 3 für MB und VT - WS 2010

1. (a) Erklären Sie ausführlich den Begriff des *vollständigen Orthogonalsystems* in einem Vektorraum $\mathcal{V}$ mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$.

   (b) Geben Sie die allgemeine Form eines Sturm–Liouvilleschen Eigenwertproblems an.

   (c) Erklären Sie den Zusammenhang von Sturm–Liouvilleschen Eigenwertproblemen mit (abstrakten) Fourierreihen.

2. Skizzieren Sie die Funktion $f(x) = |\sin x|$ und entwickeln Sie diese in eine(gewöhnliche) Fourierreihe. An welchen Stellen $x \in \mathbb{R}$ konvergiert diese Reihe gegen $|\sin(x)|$?

3. Setzen Sie die auf dem Intervall $[0, 1)$ definierte Funktion $f(x) = x$ zunächst gerade auf $[-1, 1)$ und dann periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fort. Entwickeln Sie die so erhaltene Funktion in eine Fourierreihe.

4. Setzen Sie die auf dem Intervall $[-1, 2)$ definierte Funktion $f(x) = e^x$ periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fort. Skizzieren Sie die so erhaltene Funktion und entwickeln Sie diese in eine Fourierreihe. Gegen welchen Wert konvergiert diese Reihe an $x = -1$?

5. (a) Setzen Sie die auf dem Intervall $[-\pi, \pi)$ definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \le x < 0 \\ 1 & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

   periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fort und entwickeln Sie diese Funktion in eine Fourierreihe.

   (b) Bestimmen Sie die Fourierreihe der Sägezahnkurve

$$g(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\, dt.$$

6. Lösen Sie das folgende Sturm–Liouvillesche Randwertproblem:

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y'(\pi) = y'(2\pi) = 0.$$

7. Lösen Sie die folgenden Sturm–Liouvilleschen Randwertprobleme:

   (a) $y'' + \lambda y = 0, \quad 2y(0) + y'(0) = 2y(1) + y'(1) = 0$

   (b) $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(2) = 0.$

8. Entwickeln Sie die auf dem Intervall $[\pi, 2\pi)$ definierten Funktionen

$$f(x) = 1 + \cos^2 x \qquad \text{und} \qquad g(x) = \cos x$$

nach Eigenfunktionen des Sturm–Liouvilleschen Randwertproblems aus Beispiel 6.

9. Entwickeln Sie die auf dem Intervall $[0, 2)$ definierte Funktion

$$f(x) = x^2 - 2x$$

nach Eigenfunktionen des Sturm–Liouvilleschen Randwertproblems aus Beispiel 7 (b).

10. (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x^2 y'' + xy' + \left(-\frac{1}{4} + \lambda^2 x^2\right) y = 0.$$

(b) Bestimmen Sie die Lösung des Randwertproblems

$$x^2 y'' + xy' + \left(-\frac{1}{4} + \lambda^2 x^2\right) y = 0, \qquad \lim_{x \to 0^+} |y(x)| < \infty, \qquad y(2) = 0.$$

(c) Bringen Sie das Randwertproblem aus (b) auf Sturm–Liouvillesche Form. Wie lauten die Orthogonalitätsrelationen der Eigenfunktionen?