2. Übungsblatt - Mathematik 3 für MB und VT - WS 2010

1. Erklären Sie den Begriff des ebenen (linearen) Differentialgleichungssystems und geben Sie zwei wesentliche Aussagen über diese Systeme an.

2. Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungssysteme mit der Eigenwert-Eigenvektor-methode:
$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + 3y \\ \dot{y} &= 4x + 3y, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= x + 2y \\ \dot{y} &= y. \end{aligned}$$

3. Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungssysteme mit der Eliminationsmethode:
$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x - y \\ \dot{y} &= x - y, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= 6x + 4y \\ \dot{y} &= 2x - y. \end{aligned}$$

4. Geben Sie für $t > 0$ ein Fundamentalsystem für die folgenden Differentialgleichungs-systeme an:
$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - y \\ \dot{y} &= -5x - 3y, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= \tfrac{x}{t} + 2ty \\ \dot{y} &= \tfrac{y}{t}. \end{aligned}$$

5. Gegeben sei die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass
$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (b) Berechnen Sie
$$e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n.$$
   (c) Lösen Sie das Differentialgleichungssystem $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t)$.

6. Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem mit Hilfe der Eliminationsmethode:
$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} te^t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \mathbf{0}.$$

7. (a) Erklären Sie die Begriffe Stabilität und asymptotische Stabilität der Lösung eines Differentialgleichungssystems mit konstanten Koeffizienten.
   (b) Sind die Lösungen der Differentialgleichungssysteme $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A_i\boldsymbol{x}(t)$, $i = 1, 2, 3$, instabil, stabil oder asymptotisch stabil?
$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

8. Lösen Sie Sie folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t).$$

9. Lösen Sie Sie folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t)$$

10. Lösen Sie folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t).$$