3. Übungsblatt - Mathematik 3 für MB und VT - WS 2010

1. (a) Erklären Sie die Begriffe Rotation und Divergenz eines Vektorfeldes $\boldsymbol{v} : G \to \mathbb{R}^3$ und interpretieren Sie diese Größen.

   (b) Es seien $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} : G \to \mathbb{R}^3$ Vektorfelder mit stetigen partiellen Ableitungen. Zeigen Sie, dass gilt
   $$\operatorname{div}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w} \cdot \operatorname{rot}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{rot}(\boldsymbol{w}).$$
   Berechnen Sie beide Seiten dieser Identität speziell für
   $$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} xy \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Bestimmen Sie $\Delta\varphi = \operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi)$ für das Skalarfeld $\varphi = xy^3e^z$.

   (b) Es bezeichne $\boldsymbol{r}$ den vom Ursprung ausgehenden Radiusvektor und r seinen Betrag. Berechnen Sie $\operatorname{div}(r^{-3}\boldsymbol{r})$ und $\Delta(r^{-1})$.

3. Formulieren und beweisen Sie den Integralsatz von Green.

4. Bestätigen Sie den Satz von Green am Beispiel
   $$\int_C (x^2y^2 + y)\,dx + x^2\,dy,$$
   wobei C den Rand des von $y = x^2$ und $y = x^3$ begrenzten Gebiets bezeichnet.

5. Gegeben sei eine einfach geschlossene Kurve in der Ebene mit stetig differenzierbarer Parameterdarstellung. Wenden Sie den Greenschen Satz auf diese Kurve und das Vektorfeld
   $$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$
   an. Welche bekannte Formel erhalten Sie dabei?

6. Es bezeichne C den Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0), (\frac{\pi}{2}, 0), (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$. Berechnen Sie
   $$\int_C (y - \cos x)\,dx + \sin x\,dy,$$
   sowohl direkt, als auch unter Verwendung des Satzes von Green.

7. (a) Formulieren Sie den Satz von Stokes.

   (b) Berechnen Sie $\iint_F \operatorname{rot}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{O}$ zunächst direkt und dann mit Hilfe des Satzes von Stokes, wobei
   $$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} y \\ 2x \\ \frac{x^2+y^2}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad F = \{(x,y,z) :\ z^2 = x^2 + y^2,\ 0 \le z \le 2\}.$$

8. Gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} y \\ -x - 2xz \\ -xy \end{pmatrix}.$$

Bestätigen Sie den Satz von Stokes für $\boldsymbol{v}$ und der oberhalb der (x, y)-Ebene gelegenen Halbsphäre $C = \{(x, y, z) : \, x^2 + y^2 + z^2 = 1, \, z \geq 0\}$.

9. Berechnen Sie $\iint_F \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{O}$, wobei

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x^2 + y \\ xy \\ xz + z^2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad F = \{(x, y, z) : \, 9 - x^2 - y^2 = z, \, z \geq 0\}.$$

10. Es sei F der Schnitt der Ebene $x + 2y + 3z = 4$ mit dem ersten Oktanten und

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} z(x + y) \\ x + 2y \\ y(2z - x) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_C \boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{x}$, wobei C die im mathematisch positiven Sinn durchlaufene Randkurve von F darstellt.