4. Übungsblatt - Mathematik 3 für MB und VT - WS 2010

1. Formulieren Sie drei wesentliche Integralsätze der Vektoranalysis.

2. Gegeben sei im $\mathbb{R}^3$ das Vektorfeld

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z \end{pmatrix}.$$

   Es sei W der Rand des Würfels definiert durch die Eckpunkte $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$. Bestimmen Sie $\iint_W \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{O}$.

3. Es bezeichne F den Rand des Zylinders $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\, 0 \leq z \leq 2\}$. Ein Vektorfeld $\boldsymbol{v}$ sei gegeben durch

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -xy \\ x^2 + y^2 \\ zy + x^2 \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie $\iint_F \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{O}$ direkt sowie mit Hilfe des Satzes von Gauß.

4. Ein Körper im $\mathbb{R}^3$ welcher den Voraussetungen des Satzes von Gauß genügt, habe Oberfläche F und Volume V. Berechnen Sie $\iint_F \boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{O}$, wobei $\boldsymbol{r}$ den vom Ursprung ausgehenden Radiusvektor bezeichne.

5. (a) Beweisen Sie die Greensche Formel

$$\iiint_K \nabla f \nabla g + f \Delta g \, dxdydz = \iint_F f\, \nabla g \, d\boldsymbol{O},$$

   wobei F eine geschlossene Fläche ist, die den Bereich K berandet.

   (b) Zeigen Sie das die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{l}{\sigma \varrho} \Delta T, \qquad \begin{array}{ll} T(\boldsymbol{x},t) = f(\boldsymbol{x},t) & \text{für } \boldsymbol{x} \in F, t \geq 0, \\ T(\boldsymbol{x},0) = g(\boldsymbol{x}) & \text{für } \boldsymbol{x} \in K, \end{array}$$

   eine eindeutige Lösung besitzt.

6. Bestätigen Sie den Gaußschen Integralsatz am Beispiel der Halbkugel

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\, 0 \leq z \leq 1\}$$

   und des Vektorfeldes

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} zx \\ xy \\ -zx \end{pmatrix}.$$

7. (a) Was ist eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung?
   (b) Erklären Sie den Begriff der Rumpfdifferentialgleichung und machen Sie die Methode der Charakteristiken plausibel.
   (c) Bestimmen Sie möglichst allgemeine Lösungen der Differentialgleichungen

$$2u_x + 3u_y = 0, \qquad u_x - e^x u_y = 0.$$

8. Bestimmen Sie möglichst allgemeine Lösungen der Differentialgleichungen

$$xu_x + 2yu_y = 0, \qquad yu_x - 3xu_y = 0.$$

9. Lösen Sie die Schwingungsgleichung

$$u_{tt} = u_{xx}$$

   mit Hilfe der Koordinatentransformation $X = x + t$, $Y = x - t$.

10. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} = 0.$$

   Lösen Sie diese Gleichung indem Sie zunächst die Variablentransformation $X = x$, $Y = \frac{1}{\sqrt{3}}(2x + y)$ verwenden um anschließend Beispiel 9 anwenden zu können.