5. Übungsblatt - Mathematik 3 für MB und VT - WS 2010

1. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems
$$u_{tt} = 4u_{xx} + t, \qquad u(x,0) = u_t(x,0) = 0,$$
mit Hilfe der Koordinatentransformation $X = x + 2t$, $T = x - 2t$.

2. Gegeben sei für $0 \leq x \leq 1$ und $t \geq 0$ die partielle Differentialgleichung
$$u_{tt} = u_{xx}, \qquad u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \qquad u(x,0) = \cos(\pi x),\ u_t(x,0) = \cos(2\pi x). \tag{1}$$
   (a) Zeigen Sie, dass der Separationsansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ auf das Randwertproblem
$$X'' - \lambda X = 0, \qquad X'(0) = X'(1) = 0, \tag{2}$$
   sowie die folgende gewöhnliche Differentialgleichung führt:
$$T'' - \lambda T = 0. \tag{3}$$
   (b) Ermitteln Sie die Eigenwerte λ_n und Eigenfunktionen X_n, $n \in \mathbb{N}$, von (2). Lösen Sie danach (3) für die so erhaltenen Eigenwerte λ_n, um Funktionen T_n zu erhalten.
   (c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (1) mit Hilfe des Ansatzes
$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{2} X_n(x) T_n(t).$$

3. Lösen Sie für $0 \leq x \leq 1$ und $t \geq 0$ die partielle Differentialgleichung
$$u_{tt} = u_{xx}, \qquad u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad u(x,0) = \sin(\pi x),\ u_t(x,0) = \sin(3\pi x).$$

4. Lösen Sie mit Separationsansatz für $0 \leq x \leq \pi$ und $t \geq 0$ das Randanfangswertproblem
$$u_t = u_{xx}, \qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad u(x,0) = 2\sin(x)\cos(x).$$

5. Gegeben sei für $0 \leq x \leq 2$ und $t \geq 0$ die partielle Differentialgleichung
$$u_{tt} = u_{xx}, \qquad u(0,t) = u(2,t) = 0, \qquad u(x,0) = 1 - |1 - x|,\ u_t(x,0) = 0. \tag{4}$$
   (a) Zeigen Sie, dass der Ansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ auf folgendes Randwertproblem führt
$$X'' - \lambda X = 0, \qquad X(0) = X(2) = 0. \tag{5}$$
   (b) Ermitteln Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Randwertproblems (5).
   (c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (4) mit Hilfe des Ansatzes
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\tfrac{n\pi}{2} t\right) + b_n \sin\left(\tfrac{n\pi}{2} t\right)\right) \sin\left(\tfrac{n\pi}{2} x\right).$$
   Verwenden Sie dabei die Theorie der Fourierreihen um die Koeffizienten a_n, b_n so zu wählen, dass die Anfangsbedingungen erfüllt sind.

6. Ermitteln Sie mit Hilfe der Darstellung von d'Alembert für $c > 0$, $x \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \qquad u(x,0) = e^{-x^2}, \qquad u_t(x,0) = 2cxe^{-x^2}.$$

7. Gegeben sei für $0 \leq x \leq 1$ und $t \geq 0$ die partielle Differentialgleichung

$$-u_{tt} = u_{xxxx}, \qquad \begin{array}{l} u(0,t) = u(1,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t) = 0, \\ u(x,0) = \sin(\pi x), \quad u_t(x,0) = 0. \end{array} \tag{6}$$

   (a) Zeigen Sie, dass der Separationsansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ auf das Randwertproblem

$$X'''' - \lambda X = 0, \qquad X(0) = X(1) = X''(0) = X''(1) = 0 \tag{7}$$

   führt. Beweisen Sie durch zweimalige partielle Integration, dass

$$\int_0^1 X''(x)X''(x)\,dx = \lambda \int_0^1 X^2(x)\,dx$$

   gelten muß, und somit nur positive Eigenwerte des Randwertproblems (7) existieren.

   (b) Ermitteln Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Randwertproblems (7) und bestimmen Sie durch Reihenansatz die allgemeine Lösung von (6).

8. Gegeben sei für $x, t \geq 0$ die Differentialgleichung

$$u_{tt} = 9u_{xx}, \qquad u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \qquad u(0,t) = \sin(t), \quad u \text{ beschränkt.} \tag{8}$$

   (a) Zeigen Sie, dass die Laplacetransformation bezüglich t die Differentialgleichung in folgende gewöhnliche Differentialgleichung bezüglich x überführt:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{L}(u) - \frac{s^2}{9}\mathcal{L}(u) = 0.$$

   (b) Zeigen Sie, dass die Beschränktheit von u auf die Lösung $\mathcal{L}(u) = c(s)e^{-\frac{s}{3}x}$ führt.

   (c) Verwenden Sie die Anfangsbedingung und den 2. Verschiebungssatz, um schließlich eine Lösung von (8) zu erhalten.

9. Gegeben ist eine an drei Seiten eingespannte quadratische Membran, die in einer senkrechten Ebene frei schwingen kann und die Anfangsform $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin(\pi y)$ sowie die Anfangsgeschwindigkeit 0 besitzt. Das zugehörige Schwingungsproblem ist gegeben durch das Randanfangswertproblem

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}), \qquad \begin{array}{l} u(x,0,t) = u(x,1,t) = u(0,y,t) = u_x(1,y,t) = 0, \\ u(x,y,0) = \sin\frac{\pi x}{2}\sin \pi y, \;\; u_t(x,y,0) = 0. \end{array} \tag{9}$$

   Zeigen Sie, dass der Separationsansatz $u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t)$ auf die Randwertprobleme

$$\begin{aligned} X'' - \beta X &= 0, \qquad & X(0) = X'(1) = 0, \\ Y'' + (\beta - \alpha)Y &= 0, \qquad & Y(0) = Y(1) = 0, \end{aligned}$$

   sowie die folgende gewöhnliche Differentialgleichung führt:

$$T'' - c^2\alpha T = 0.$$

10. Verwenden Sie den Ansatz

$$u(x,y,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(a_{mn}\cos(\lambda_{mn}t) + b_{mn}\sin(\lambda_{mn}t))\sin\left(\tfrac{2m+1}{2}\pi x\right)\sin(n\pi y)$$

zur Bestimmung einer Lösung des Randanfangswertproblems aus Beispiel 9.

Hinweis: Die λ_{mn} ergeben sich aus Eigenwerten der Randwertprobleme aus Beispiel 9.