4. Übung Mathematik 2 für MB/VT/WI

31. (a) Wie sieht der Lösungsraum eines lineares Gleichungssystems aus (3 substantiell verschiedene Möglichkeiten)?
    (b) Bei welchen linearen Gleichungssystemen kann man die Cramer'sche Regel anwenden?
    (c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender linearer Gleichungssysteme mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren. Bestätigen Sie, wo möglich, Ihr Ergebnis, indem Sie die Lösung auch mit der Cramer'schen Regel berechnen:

$$\begin{aligned} x+2y+3z &= 2\\ x-2y-\;\, z &= -2\\ 2x-\;\, y+\;\, z &= -1 \end{aligned}\;, \qquad \begin{aligned} x+2y+3z &= 2\\ x-2y-\;\, z &= -2\\ -2x+2y-2z &= 4 \end{aligned}\;, \qquad \begin{aligned} x+2y+3z &= 2\\ x-2y-\;\, z &= -2\\ 2x-\;\, y+\;\, z &= 1 \end{aligned}\;.$$

32. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1+5x_2+x_3+2x_4 &= 1\\ 2x_1-4x_2+3x_3+7x_4 &= 2\\ 4x_1+14x_2-x_3-3x_4 &= 0\\ 13x_1+7x_2+9x_3+20x_4 &= 7 \end{aligned}$$

    (a) Erklären Sie das Rangkriterium für lineare Gleichungssysteme.
    (b) Überprüfen Sie die Lösbarkeit des gegebenen Gleichungssystems mit dem Rangkriterium.
    (c) Lsen Sie das gegebene lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Gauss-Algorithmus und beschreiben Sie die allgemeine Lsung als Linearkombination von linear unabhngigen Vektoren.

33. (a) Lösen Sie das Ausgleichsproblem für das folgende System von Geraden im $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} x+y &= 1\\ y &= 0\\ y &= 1\\ x+y &= 2\\ x\;\;\;\; &= 0 \end{aligned}$$

    (b) Dasselbe für das System $(A|\boldsymbol{b})$, das man erhält, wenn man die obigen Geraden auf Hessesche Normalform bringt. Was zeigt dieses Beispiel?
    (c) Überzeugen Sie sich, dass das System $(A|\boldsymbol{b})$ unlösbar ist, indem Sie Rang (A) mit Rang $(A|\boldsymbol{b})$ vergleichen.

34. Sei A eine $n \times n$ Matrix.
    (a) Was ist ein Eigenwert und ein Eigenvektor von A (Definition und geometrische Deutung!)? Begründen Sie ausführlich anhand der Definition, warum die reellen Zahlen λ mit $\mathrm{Det}(A-\lambda I)=0$ die Eigenwerte von A sind und warum sich für diese Zahlen λ tatsächlich Eigenvektoren finden lassen.
    (b) Sei λ ein fixer Eigenwert von A. Überlegen Sie sich anhand der Definition von Eigenwerten und Eigenvektoren (d.h. mittels $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$), jeweils einen Eigenwert von A^3 und A^{-1}.

35. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren folgender Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&1\\0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 17&0&0\\0&17&0\\0&0&17 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1&0&3\\0&3&0\\3&0&1 \end{pmatrix}.$$

36. Wann ist eine Matrix S orthogonal? Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix S, sodass

$$S^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} S$$

eine Diagonalmatrix ist. Berechnen Sie A^{17}, indem Sie die Darstellung $A = SDS^{-1}$ benutzen.

37. Gegeben ist wieder die Gerade $y = 2x$ im $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie erneut die Matrix S, welche an der Gerade (vgl. Bsp. 28) spiegelt, indem Sie nun die Eigenvektor–Eigenwert Methode, d.h. die Formel $A = SDS^{-1}$, verwenden. Wiederholen Sie die Bedeutung dieser Formel hinsichtlich *Lineartransformationen bei Basiswechel* (5.6.4 im Skript).
(Hinweis: Die Eigenwerte sind 1 und -1, die Eigenvektoren sind $t\binom{1}{2}$ und $t\binom{-2}{1}$ – warum?)

38. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{1-ab} & a \\ b & -\sqrt{1-ab} \end{pmatrix}, \qquad a, b \text{ reell mit } 1 - ab > 0.$$

   (a) Bestätigen Sie, dass $A = A^{-1}$.
   (b) Was ist folglich A^n für n gerade bzw. für n ungerade?
   (c) Berechnen Sie die Eigenvektoren zu A speziell im Fall $a = 3$ und $b = 0$.
   (d) Geben Sie die Zerlegung $A = SDS^{-1}$ für dieses spezielle A explizit an.

39. Die Exponentialfunktion für quadratische Matrizen ist (analog zur klassischen Definition der Exponentialfunktion) definiert durch

$$\mathrm{e}^M = I + M + \frac{M^2}{2!} + \frac{M^3}{3!} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!},$$

d.h. für eine Matrix M ist e^M ebenfalls eine Matrix. (Die Konvergenz der vorkommenden Reihe lässt sich leicht verifizieren, dies ist nicht durchzuführen!)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

wie am Ende des vorigen Beispiels. Berechnen Sie e^A

   (a) indem Sie direkt in die Defintion der Exponentialfunktion für Matrizen einsetzen und die auftretenden Reihen komponentenweise berechnen (unter Verwendung der unter (b) berechneten Formeln für A^n für n gerade bzw. für n ungerade) und
   (b) indem Sie A^n mit Hilfe der Zerlegung $A = SDS^{-1}$ einfach darstellen und schließlich die rechte Seite von

$$\mathrm{e}^A = S \begin{pmatrix} \mathrm{e} & 0 \\ 0 & 1/\mathrm{e} \end{pmatrix} S^{-1}$$

   (warum gilt diese Gleichung?) berechnen.

40. Die folgende Kegelschnittslinie ist durch eine *Drehung* S (d.h. $\det S = 1$) des Koordinatensystems auf Hauptachsenform zu transformieren: $-3x^2 + 8xy + 3y^2 = 1$. Geben Sie die neue Basis (nach der Drehung) an.