

4. Übung Mathematik 2 für MB/VT/WI

31. (a) Wie sieht der Lösungsraum eines lineares Gleichungssystems aus (3 substantiell verschiedene Möglichkeiten)?
- (b) Bei welchen linearen Gleichungssystemen kann man die Cramer'sche Regel anwenden?
- (c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender linearer Gleichungssysteme mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren. Bestätigen Sie, wo möglich, Ihr Ergebnis, indem Sie die Lösung auch mit der Cramer'schen Regel berechnen:

$$\begin{array}{rcl} 2y + 3z & = & 1 \\ x - y - 2z & = & 0 \\ -2x - y + z & = & 0 \end{array}, \quad \begin{array}{rcl} x + 2y + z & = & 3 \\ x - 2y + z & = & \frac{1}{2} \\ 3x - 2y + 2z & = & -3 \end{array}, \quad \begin{array}{rcl} x + 2z & = & 1 \\ x - 3y - z & = & 1 \\ x + y + 3z & = & 1 \end{array}.$$

32. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 6x_3 + 4x_4 & = & 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 & = & 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 1 \end{array}$$

- (a) Erklären Sie das Rangkriterium für lineare Gleichungssysteme.
- (b) Überprüfen Sie die Lösbarkeit des gegebenen Gleichungssystems mit dem Rangkriterium.
- (c) Lösen Sie das gegebene lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Gauss-Algorithmus und beschreiben Sie die allgemeine Lösung als Linearkombination von linear unabhängigen Vektoren.
33. Setzen Sie folgende Aussagen, über eine reelle $n \times n$ Matrix M , zueinander in Beziehung in dem Sie \Rightarrow , \Leftarrow und \Leftrightarrow verwenden:
- (a) M ist eine orthogonale Matrix (S. 45 im Skript, 5.6.1).
- (b) Die Spalten von M sind linear unabhängig.
- (c) $\text{Det}(M) \neq 0$.
- (d) M ist bijektiv.
- (e) Die Spalten von M sind paarweise orthogonal zueinander.
- (f) $\text{rg}(M) = n$.
- (g) Es gilt: $MM^T = I$.
- (h) M ist invertierbar.

34. Sei A eine $n \times n$ Matrix.

- (a) Was ist ein Eigenwert und ein Eigenvektor von A (Definition und geometrische Deutung!)? Begründen Sie ausführlich anhand der Definition, warum die reellen Zahlen λ mit $\text{Det}(A - \lambda I) = 0$ die Eigenwerte von A sind und warum sich für diese Zahlen λ tatsächlich Eigenvektoren finden lassen.
- (b) Sei λ ein fixer Eigenwert von A . Überlegen Sie sich anhand der Definition von Eigenwerten und Eigenvektoren (d.h. mittels $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$), jeweils einen Eigenwert von A^3 und A^{-1} .

35. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren folgender Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \\ 0 & 42 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

36. Wann ist eine Matrix S orthogonal? Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix S , sodass

$$S^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} S$$

eine Diagonalmatrix ist. Berechnen Sie A^{15} , indem Sie die Darstellung $A = SDS^{-1}$ benutzen.

37. Sei Q eine orthogonale 2×2 Matrix, zeigen Sie das gilt

(a)

$$Qx \cdot Qy = x \cdot y, \quad x, y \in \mathbb{R}^2. \quad (1)$$

Diese Eigenschaft wird auch Winkeltreue genannt, warum? Wie verändert sich die Länge eines Vektors x unter der Abbildung Q ?

(b) $|\text{Det}(Q)| = 1$.

38. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{1-ab} & a \\ b & -\sqrt{1-ab} \end{pmatrix}, \quad a, b \text{ reell mit } 1 - ab > 0.$$

- (a) Bestätigen Sie, dass $A = A^{-1}$.
 (b) Was ist folglich A^n für n gerade bzw. für n ungerade?
 (c) Berechnen Sie die Eigenvektoren zu A speziell im Fall $a = 3$ und $b = 0$.
 (d) Geben Sie die Zerlegung $A = SDS^{-1}$ für dieses spezielle A explizit an.

39. Die Exponentialfunktion für quadratische Matrizen ist (analog zur klassischen Definition der Exponentialfunktion) definiert durch

$$e^M = I + M + \frac{M^2}{2!} + \frac{M^3}{3!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{M^i}{i!},$$

d.h. für eine Matrix M ist e^M ebenfalls eine Matrix. (Die Konvergenz der vorkommenden Reihe lässt sich leicht verifizieren, dies ist nicht durchzuführen!)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

wie am Ende des vorigen Beispiels. Berechnen Sie e^A

- (a) indem Sie direkt in die Definition der Exponentialfunktion für Matrizen einsetzen und die auftretenden Reihen komponentenweise berechnen (unter Verwendung der unter (b) berechneten Formeln für A^n für n gerade bzw. für n ungerade) und
 (b) indem Sie A^n mit Hilfe der Zerlegung $A = SDS^{-1}$ einfach darstellen und schließlich die rechte Seite von

$$e^A = S \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1/e \end{pmatrix} S^{-1}$$

(warum gilt diese Gleichung?) berechnen.

40. Die folgende Kegelschnittslinie ist durch eine Drehung S (d.h. $\det S = 1$) des Koordinatensystems auf Hauptachsenform zu transformieren: $x^2 + 4xy + y^2 = 1$. Geben Sie die neue Basis (nach der Drehung) an.