1. Übungsblatt am 9.3.2011 - Mathematik 1 für BI - SS 2011

1. Lesen Sie (im Skriptum, auf Wikipedia, ...) folgende Begriffe nach: logisches 'und' ($\wedge$), logisches 'oder' ($\vee$), Implikation ($\Rightarrow$), Äquivalenz ($\Leftrightarrow$), Negation ($\neg$), Allquantor ($\forall$) und Existenzquantor ($\exists$). Geben Sie jeweils die Wahrheitstafeln an!

2. Gegeben sind jeweis zwei Aussagen A und B. Begründen Sie intuitiv sowie mit dem aussagenlogischen Wissen aus Beispiel 1, ob die Aussagen $A \Rightarrow B$ (aus A folgt B), bzw. $B \Rightarrow A$, gelten. Formulieren Sie überdies die sogenannte "Kontraposition" zu $A \Rightarrow B$, d.h. die Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$.

A	B
x bekommt ein positives Übungszeugnis	x kreuzt mehr als 50% der Beispiele.
x bekommt den Führerschein	x ist mindestens 18
x ist ein Quadrat	x ist ein Rechteck
x ist ein Quadrat und ein Kreis	x ist eine Ellipse
x ist ein Quadrat oder ein Kreis	x ist eine Ellipse
$x^2 > 9$	$x > 3$
$\sin(x) = 0$	$x = \pi$
Eine Zahl ist durch zwei teilbar	Eine Zahl ist gerade
$x = 0$ und $y = 0$	$x \cdot y = 0$

3. In der folgenden Aussage stehen Q_1 und Q_2 jeweils für Existenz– ($\exists$) oder All–Quantor ($\forall$). Formulieren Sie alle vier möglichen Formeln

$$Q_1 x Q_2 y : x \text{ liebt } y \tag{1}$$

und überlegen Sie, welche der Formeln (1) welche anderen Formeln impliziert.

Negieren Sie die Formeln (1) und überlegen Sie wieder, welche Implikationen sich ergeben.

4. Für reelle Zahlen p und q sei die Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

gegeben.

   (a) Leiten Sie die Lösungsformel für solche Gleichungen her. Ergänzen Sie hierzu die linke Seite der Gleichung auf ein vollständiges Quadrat.

   (b) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen von

$$x^2 + 4x - 5 = 0, \quad x^2 + 14x + 49 = 0, \quad x^2 - 2x + 2 = 0.$$

5. Geben Sie alle reellen Zahlen an, welche die folgenden Ungleichungen erfüllen:

$$x - 5 > 2, \quad |x - 1| < 1, \quad |x| - 1 < 1.$$

$$x^2 + 4x - 5 < 0, \quad x^2 + 14x + 49 > 0, \quad x^2 - 2x + 2 > 0.$$

6. (a) Zeigen Sie, dass für beliebige reelle Zahlen a und b gilt

$$\max(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2}$$

indem Sie die drei Fälle $a > b$, $a < b$ bzw. $a = b$ durchgehen.

(b) Wo liegt der Fehler in folgendem 'Beweis':

$$\begin{array}{rcll} 1 & = & 1 & | \cdot a^2 - a^2 \\ a^2 - a^2 & = & a^2 - a^2 & |\text{herausheben bzw. binomische Formel} \\ a(a-a) & = & (a-a)(a+a) & |\text{mit } (a-a) \text{ kürzen} \\ a & = & a + a & \\ a & = & 2a & |\text{durch } a \text{ dividieren} \\ 1 & = & 2 & \end{array}$$

7. Sei $D.M.Y$ ihr Geburtsdatum, z.B. $D = 24, M = 12$ und $Y = 1990$ für den 24. Dezember 1990.

(a) Berechnen Sie die Primfaktor-Zerlegung von D, M und Y.

(b) Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler (ggT) und das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) von D und M.

(c) Begründen Sie warum entweder D eine Primzahl ist, oder es mindestens einen Primfaktor von D geben muss, der kleiner als 6 ist

(d) Begründen Sie warum entweder M eine Primzahl ist, oder es mindestens einen Primfaktor von M geben muss, der kleiner als 4 ist

(e) Begründen Sie warum entweder Y eine Primzahl ist, oder es mindestens einen Primfaktor von Y geben muss, der kleiner als 45 ist.