10. Übungsblatt am 25.5.2011 - Mathematik 1 für BI - WS 2010

63. Berechnen Sie analog zu Beispiel 50 die Ableitung der Funktion $f(x) = \arctan x$. Ohne Taschenrechner: wie groß ist $\arctan(1)$?

64. Entwickeln zuerst $\arctan(x)'$ und dann $\arctan(x)$ in eine Tayorreihe um $x_0 = 0$.

65. Es sei $x > -1, x \neq 0$. Formulieren Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung und beweisen Sie damit die Ungleichungen

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

66. Formulieren Sie die Regel von de L'Hospital und verwenden Sie diese (falls notwendig und erlaubt) zur Bestimmung der Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin^2(2x)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x}{e^x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x - \arctan x}{x^3}, \quad \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x\to\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

67. Es sei $k \in \mathbb{N}$ fest. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^k}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^k}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^k}.$$

68. Leiten Sie die Taylorreihen folgender Funktionen aus bereits bekannten Reihen ab und geben Sie ihren Konvergenzradius an:

    (a) $x\ln(1-x^2)$ um $x = 0$,

    (b) $\ln(1 - x + x^2)$ um $x = \frac{1}{2}$.

69. Erläutern Sie anhand einer Skizze die Iterationsvorschrift des Newton'schen Näherungsverfahrens und berechnen Sie damit jene Lösung der Gleichung $\tan x = x$ welche im Intervall $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ liegt.