11. Übungsblatt am 1.6.2011 - Mathematik 1 für BI - WS 2010

70. Geben Sie die allgemeine Definition des Riemann Integrals an. Berechnen Sie direkt nach dieser Definition das Integral
$$\int_0^1 x dx.$$

71. Berechnen Sie für die folgenden Funktionen die Zwischensummen
$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$
und interpretieren Sie diese durch eine Skizze geometrisch.
    (a) $f(x) = x^3$, $\{x_0, \ldots, x_6\} = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\}$ und $\xi_k = x_{k-1}$ für $k = 1, \ldots, 6$.
    (b) $g(x) = x \sin x$, $\{x_0, \ldots, x_4\} = \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi\}$ und $\xi_k = x_k$ für $k = 1, \ldots, 4$.

72. Gegeben sei die Funktionenfolge $f_n(x) = 2nxe^{-nx^2}$ für $0 \leq x \leq 1$.
    (a) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ für $0 \leq x \leq 1$.
    (b) Zeigen Sie, dass
$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx.$$

73. Suchen Sie sich irgendeine konkrete differenzierbare Funktion f auf dem Intervall $[0, 1]$ aus und berechnen Sie
    (a) $F(T) := \int_0^T f(t)\, dt$.
    (b) $F'(T)$, indem Sie Ihr Ergebnis aus (a) verwenden.
    (c) $F'(T)$, indem Sie allgemein die Definition des Differentialquotienten verwenden. Hinweis: Um $F'(T)$ an einer Stelle T_0 zu berechnen, ist es sinnvoll zuerst $f(t)$ um T_0 durch eine lineare Approximation zu ersetzen!

74. Berechnen Sie die unbestimmten Integrale
$$\int x \sin x\, dx, \qquad \int x^2 \cos x\, dx, \qquad \int x \sin^2 x\, dx.$$

75. Berechnen Sie die unbestimmten Integrale
$$\int \frac{2x}{(1+x)(1+x^2)}\, dx, \qquad \int \frac{1}{1+x^3}\, dx, \qquad \int \frac{x}{(1+x^2)^2}\, dx.$$

76. Es sei $p(x)$ ein Polynom vom Grad n. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass
$$\int p(x)e^x\, dx = q(x)e^x + c,$$
wobei $q(x)$ wieder ein Polynom vom Grad n ist.