12. Übungsblatt am 8.6.2011 - Mathematik 1 für BI - WS 2010

77. (a) Sind folgende uneigentlichen Integrale konvergent oder divergent:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx, \qquad \int_{1}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}dx \qquad \int_{1}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx.$$

(b) Benutzen Sie das Cauchy'sche Integralkriterium, um folgende unendliche Reihen auf Konvergenz zu untersuchen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}.$$

78. Gegeben sei das Parameterintegral $I(t) = \int_{2t}^{3t} 2tx\,dx$.

(a) Berechenen Sie $I(t)$.

(b) Berechnene Sie $I'(t)$ *zuerst* mithilfe der Leibniz'schen Regel für Parameterintegrale und dann *nochmals*, direkt, durch Ableiten von (a).

79. Formulieren Sie die Leibniz'sche Sektorformel und machen Sie diese plausibel.

80. Gegeben sei die Kurve γ mit Parameterdarstellung $x(t) = 2 - 2t^2$, $y(t) = t^2$.

(a) Skizzieren Sie die Kurve γ für Parameterwerte $0 \leq t \leq 1$.

(b) Berechnen Sie die Länge jenes Teils der Kurve γ, der die Punkte $(2, 0)$ und $(0, 1)$ verbindet.

(c) Berechnen Sie nach der Sektorformel den Flächeninhalt jenes Bereichs, der von der x-Achse, der y-Achse und der Kurve γ eingeschlossen wird.

81. Bestimmen Sie mit Hilfe der Leibniz'schen Sektorformel den Flächeninhalt einer Ellipse, deren Hauptachsen die Längen $a, b > 0$ haben.

82. Skizzieren Sie das Flächenstück F, das von der geschlossenen Kurve

$$x(t) = t(t - 2\pi)\cos t, \quad y(t) = \sin t, \qquad t \in [0, 2\pi] \tag{4}$$

eingeschlossen wird und bestimmen Sie den Flächeninhalt von F.

83. Skizzieren Sie die in Polarkoordinaten gegebene Archimedische Spirale

$$r(\varphi) = 3\varphi, \qquad \varphi \in [0, 2\pi],$$

und bestimmen Sie ihre Länge.