13. Übungsblatt am 15.6.2011 - Mathematik 1 für BI - SS 2011

Rechen Sie folgenden Übungstest durch:

(a) Diskutieren Sie die Funktion $f(x) = x^2 - 5x + 2\ln(x)$ für $x > 0$.

a.) Wo ist f stetig, wo differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort! 1 Punkt

b.) Berechnen Sie das asymptotische Verhalten für $x \to 0$ bzw. $x \to \infty$. 1 Punkt

c.) Berechnen Sie die möglichen Extremwerte, entscheiden Sie ob es sich um Minima oder Maxima handelt und ob diese Minima bzw. Maxima lokal oder sogar global sind. 2 Punkte

d.) Besitzt die Funktion $f(x)$ eine Nullstelle? Begründen Sie Ihre Antwort. 1 Punkt

e.) Fertigen Sie eine Skizze des Graphen von $f(x)$ an! 1 Punkt

(b) i. Es sei $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie für welche Werte von a das uneigentliche Integral $\int_a^\infty \frac{1}{x^2} dx$ konvergiert und geben Sie den Wert dieses Integrals an! 2 Punkte

ii. Django Reinhardt sitzt im Himmel und feiert Geburtstag. Sein Freund Isaac Newton erklärt ihm, dass auf Gitarren der Masse m, die sich im Abstand r vom Erdmittelpunkt befinden, die Gravitationskraft

$$F(r) = G\,M\,m \cdot \frac{1}{r^2}$$

wirkt. (G ist die Gravitationskonstante, M die Erdmasse). Djangos alte Gitarre war sehr leicht und wog nur ca 1 kg. Die Energie, die nötig ist, damit Djangos zahlreiche Verehrer seine Gitarre von der Erdoberfläche unendlich hoch in den Himmel schießen können, ist daher gegeben durch das Integral

$$E = G\,M \cdot \int_a^\infty \frac{1}{x^2} dx$$

mit $a > 0$, dem Erdradius. Die numerischen Werte (SI) betragen $G = 6.67 \times 10^{-11}$, $M = 5.97 \times 10^{24}$, $a = 6.37 \times 10^6$. Geben Sie die Größenordnung von E an: 1 Punkt

☐ 10^{-1} Joule ☐ 10^0 Joule ☐ 10^1 Joule ☐ 10^7 Joule ☐ 10^{17} Joule

(c) Gegeben sei die rationale Funktion $f(x) = \frac{2}{1-x^2}$.

i. Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von $f(x)$. 1 Punkt

ii. Geben Sie alle Stammfunktionen von $f(x)$ an! 1,5 Punkte

iii. Ist $F(x) = \int_0^{2x} \frac{4}{4-t^2}\, dt$ eine Stammfunktion von $f(x)$? 1,5 Punkte

iv. Geben Sie die Taylorentwicklung von $f(x)$ um die Entwicklungsstelle $x = 0$ an. Wie groß ist der Konvergenzradius dieser Taylorreihe? Verwenden Sie dazu das Wurzel- oder Quotientenkriterium. 2 Punkte

Rechnen Sie nun noch diesen Übungstest durch:

(a) Gegeben sei die rationale Funktion $f(x) = \frac{8}{4-x^2}$.

i. Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von $f(x)$.

ii. Geben Sie die Taylorentwicklung von $f(x)$ um die Entwicklungsstelle $x = 0$ an.

iii. Berechnen Sie den Konvergenzradius dieser Potenzreihe. Verwenden Sie dazu das Wurzel- oder Quotientenkriterium.

2+1+1 Punkte

(b) Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} - \frac{x^2}{4}$.

i. Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f. Wo ist f stetig?

ii. Betrachten Sie folgenden Grenzwert:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

Was können Sie daraus über die Differenzierbarkeit von f an der Stelle $x = 2$ schließen? Und an der Stelle $x = -2$? Was kann man allgemein über die Differnzierbarkeit von f sagen?

iii. Wo gibt es mögliche Extremwerte? Handelt es sich dabei um Minima oder Maxima? Geben Sie die Gleichung der Tangente an f in diesen Stellen an.

iv. Besitzt die Funktion $f(x)$ eine oder mehrere Nullstellen? Begründen Sie Ihre Antwort mithilfe einer der vorigen Fragen oder dem Zwischenwertsatz.

v. Fertigen Sie eine Skizze des Graphen von $f(x)$ an!

1+2+2+1+1 Punkte

(c) i. Für welche Werte von $n \in \{-1, 0, 1, 2\}$ ist das folgende Integral endlich? Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie das Integral berechnen.

$$\int_0^3 \frac{1}{x^n} dx.$$

ii. Berechnen Sie das folgende Integral mithilfe von partieller Integration:

$$\int_0^\pi \cos^2(x) dx$$

Hinweis: Verwenden Sie, dass $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ gilt.

2+2 Punkte