2. Übungsblatt am 16.3.2011 - Mathematik 1 für BI - WS 2010

8. (a) Wiederholen Sie den Induktionsbeweis der Formel

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{2}$$

aus dem Skript. Berechnen Sie insbesondere

$$\sum_{i=1}^{1000} i \quad \text{und} \quad \sum_{i=17}^{117} i.$$

folgt.

(b) Benutzen Sie die Formel (2), um mit vollständiger Induktion die Gültigkeit von

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$$

nachzuweisen.

9. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

10. (a) Für für $n \in \mathbb{N}$ gilt $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{8}(2n+1)^2$.
Zeigen Sie den Induktionsschritt! Folgt daraus schon die Gültigkeit der Aussage? Wenn nein, begründen Sie dies!

(b) Wo liegt der Fehler in folgendem ,,Beweis" der Aussage *In einer Gruppe von n Menschen haben alle die gleiche Augenfarbe.*?

Induktionsstart ($n = 1$): Nur eine Person; deren Augen haben sicher nur eine Farbe.
Induktionsschritt: Laut Induktionsannahme gilt die Aussage für jede n Personen umfassende Gruppe. Betrachtet man nun eine Gruppe von $n+1$ Personen, so wählt man zunächst n von ihnen willkürlich – diese haben aufgrund der Induktionsvoraussetzung alle gleiche Augenfarbe. Anschließend ersetzt man in dieser Gruppe beliebig eine Person durch die noch nicht betrachtete $(n+1)$–te Person. Abermals ist die Induktionsvoraussetzung erfüllt, d.h. auch in dieser nun betrachteten Gruppe von n Personen haben alle dieselbe Augenfarbe, d.h. auch die $(n+1)$–te Person hat dieselbe Augenfarbe. Somit haben alle $n+1$ Personen dieselbe Augenfarbe.

11. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ stets durch 3 teilbar ist. (Anmerkung: Eine natürliche Zahl z ist genau dann durch 3 teilbar, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $z = 3k$.)

12. Beweisen Sie durch vollständige Induktion für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^{n} (4i - 1) = 2n^2 + n.$$

13. Beweisen Sie durch vollständige Induktion für $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$:

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{i-1}{i!} = \frac{n!-1}{n!}.$$

14. Beweisen Sie durch vollständige Induktion für $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$:

$$n \cdot \sqrt{n} > n + \sqrt{n}.$$