4. Übungsblatt am 30.3.2011 - Mathematik 1 für BI - WS 2010

22. Verwenden Sie $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$ für die Berechnung der Grenzwerte von:

$$a_n = \left(1+\frac{2}{3n}\right)^{3n-2} \qquad \text{und} \qquad b_n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{(n-1)^2}.$$

23. Diskutieren Sie die Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz der Folge (x^n) in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$.

24. Es sei (a_n) eine beliebige konvergente Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

    (a) Zeigen Sie, dass die Folge (b_n), definiert durch $b_n := \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$, ebenfalls konvergent ist, und den selben Grenzwert wie (a_n) besitzt.

    (b) Berechnen Sie konkret für $a_n = (-1)^n$ die Folge (b_n). Was fällt Ihnen auf?

25. Es sei (a_n) eine Folge, deren Folgenglieder die Ungleichung $0 < a_n < \frac{1}{2}a_{n-1}$ erfüllen. Ist die Folge (a_n) konvergent?

26. Betrachten Sie die rekursiv definierten Folge (a_n) mit Bildungsgesetz

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n}.$$

Der Startwert sei $a_1 := 4$. Schreiben Sie so viele Folgenglieder explizit an, bis Sie eine Vermutung das Monotonie- und Grenzverhalten von (a_n) betreffend haben. Beweisen Sie sodann präzise (d.h. mit vollständiger Induktion), dass (a_n) monoton ist! Bestimmen Sie präzise (d.h. anhand der mathematischen Definition von Konvergenz) den Grenzwert von (a_n).

27. Betrachten Sie die rekursiv definierte Folge

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} := 6\,\frac{a_n+1}{a_n+7}.$$

Untersuchen Sie Monotonie- und Konvergenzverhalten und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

28. Betrachten Sie die Fibonacci Folge mit Startwerten $F_1 = 1, F_2 = 1$ und Bildungsgesetz

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

    (a) Bestätigen Sie die explizite Darstellung $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$ für *alle* $n \in \mathbb{N}$, wobei $\alpha > \beta$ die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$ sind. Sie werden dazu das Prinzip der vollständigen Induktion benötigen.

    (b) Zeigen Sie, dass die Quotientenfolge $\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)$ konvergiert und ihr Grenzwert gerade der Wert des goldenen Schnitts ist.