5. Übungsblatt am 6.4.2011 - Mathematik 1 für BI - WS 2010

29. Berechnen Sie den Wert der folgenden Reihen:

    (a) $\sum_{n=1}^{1000} \sin(\frac{n!\pi}{120})$

    (b) $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

    (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$,

    Hinweis zu (b): $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)}$.

30. Erklären Sie den Begriff der Konvergenz einer unendlichen Reihe mit Hilfe der Folge der Partialsummen und erläutern Sie auch absolute Konvergenz anhand der Beispiele

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{n+3}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+3}.$$

31. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \dots \tag{3}$$

    divergiert. Wie weit müssen Sie summieren damit die Summe (3) den Wert 10^{10} übersteigt. Anleitung: Überlegen Sie zuerst dass der Ausdruck in jeder Klammer stets größer als $\frac{1}{2}$ ist und berechnen Sie dann wie viele dieser Klammerausdrücke benötigt werden.

32. Gegeben sind die Summanden a_n einiger Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Weisen Sie die Konvergenz bzw. Divergenz folgender Reihen mit dem Majoranten bzw. Minorantenkriterium nach.

    (a) $a_n = \frac{2n-4}{n^4+2}$. (Hinweis: diese Reihe ist konvergent.)

    (b) $a_n = \frac{24n}{n^2-4}$. (Hinweis: diese Reihe ist divergent.)

    (c) $a_n = \frac{2n+\cos(4n)}{4n^2}$. (Hinweis: diese Reihe ist divergent.)

    Hinweis: Verwenden Sie die bereits bekannten Konvergenz- bzw. Divergenzaussagen für Reihen der Form $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

33. Untersuchen Sie die nachstehenden Reihen auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3+\ln n}$$

34. Untersuchen Sie die nachstehenden Reihen auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{2n-3}$$

35. Untersuchen Sie die nachstehenden Reihen auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(3n)!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2+1}$$