6. Übungsblatt am 13.4.2011 - Mathematik 1 für BI - WS 2010

36. (a) Was ist eine Funktion? Wann ist eine Funktion injektiv, surjektiv bzw. bijektiv?
    (b) Welche der folgenden Abbildungen ist eine Funktion. Falls eine Funktion vorliegt: Ist diese injektiv, surjektiv, bijektiv?
        i. $f : \{\text{Kreise in der Ebene}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) =$ Flächeninhalt von x.
        ii. $f : \{\text{Kreise in der Ebene mit Mittelpunkt } (0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x) =$ Flächeninhalt von x.
        iii. $f : \{18, 19, 20, 21\} \to \{\text{Vornamen}\}$, $f(x) =$ Vorname einer/s Studierenden an der TU, die/der x Jahre alt ist.
        iv. $f : \{\text{Nadelbäume im Wiener Wald}\} \to \mathbb{N}$, $f(x) =$ Anzahl der Nadeln von x.
        v. $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(m, n) = 2^m 3^n$. (Anmerkung: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ steht für die Menge aller Zahlempaare (n, m) mit $n, m \in \mathbb{N}$.)
        vi. $f : \{\text{Punkte in der Ebene}\} \to \{\text{Vektoren im } \mathbb{R}^2\}$, $f(P) =$ Ortsvektor $\overline{\binom{0}{0}P}$.
        vii. $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n, m) = k$, wenn k gemeinsamer Teiler von n und m ist.
        viii. $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n, m) = k$, wenn k größter gemeinsamer Teiler von n und m ist.
        ix. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = y$, wobei y die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ erfüllt.

37. (a) Was ist eine reelle Funktion?
    (b) Erklären Sie die Begriffe *Bildbereich*, *Wertebereich* und *Definitionsbereich* einer reellen Funktion.
    (c) Was ist eine Umkehrfunktion? Wann existiert eine Umkehrfunktion? Wie ermittelt man die Umkehrfunktion graphisch?
    (d) Gegeben sind die beiden Funktion $f(x) = x^2 - 2$ und $g(x) = \frac{1}{x}$. Was ist dann $f(g(x))$ und $g(f(x))$? Skizzieren Sie die Funktionsgraphen dieser Funktionen.
    (e) Sei wieder $f(x) = x^2 - 2$. Geben Sie einen Definitionsbereich D an, sodass $f(x)$ auf D injektiv ist und berechnen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$. Skizzieren Sie weiters $f(f^{-1}(x))$ und $f^{-1}(f(x))$.

38. (a) Eine reelle Funktion $f(x)$ heißt gerade, falls $f(x) = f(-x)$ und ungerade, falls $f(x) = -f(-x)$. Wie sieht der Funktionsgraph einer geraden bzw. einer ungeraden Funktion aus? Gibt es eine Funktion, die gleichzeitig gerade und ungerade ist?
    (b) Skizzieren Sie die folgenden Funktionen. Wo sind die Funktionen jeweils definiert, wo (streng) monoton wachsend bzw. fallend, welche Funktionen sind gerade, welche ungerade?

$$|x|, \quad \sin(x), \quad \tan(x), \quad \mathrm{e}^x, \quad \ln(x), \quad \ln(|x|), \quad |\ln(x)|, \quad f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad x < 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ 1 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases} .$$

39. (a) Sei f eine reelle Funktion und a eine reelle Zahl im Definitionsbereich von f. Wie lautet die Definition von Grenzwert von f bei x gegen a, in Zeichen $\lim\limits_{x \to a} f(x)$?

(b) Existieren folgende Limiten? Argumentieren Sie ausführlich warum bzw. warum nicht.

i. $\lim\limits_{x \to 0} \sin(x)$.

ii. $\lim\limits_{x \to 0} \sin(1/x)$.

iii. $\lim\limits_{x \to 0} x \sin(1/x)$.

iv. $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sgn}(x)$.

v. $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sgn}(x+1)$.

vi. $\lim\limits_{x \to 0} 1/x$.

40. Gegeben ist die Funktion ($a \in \mathbb{R}$):

$$f_a(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x < -1, \\ ax + \frac{1}{2} & \text{für } -1 \leq x < 1, \\ \sin(x-1) & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$

(a) Kann $a \in \mathbb{R}$ so gewählt werden, dass f_a stetig ist? Geben Sie dazu eine rechnerische Begründung.

(b) Skizzieren Sie die Funktion f_0.

(c) Geben Sie den Bildbereich der Funktion f_0 an.

(d) Geben Sie die Umkehrfunktion von f_0 im Intervall $(-\infty, -1]$ an.

41. In welchen Punkten $x \in [0,1]$ ist folgende Funktion stetig:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0, \\ 1 - \frac{1}{2^n} & \text{für } x \in \left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right], n \in \mathbb{N} \end{cases}$$