7. Übungsblatt am 4.5.2011 - Mathematik 1 für BI - WS 2010

42. Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = (1 - \ln(tx))^2, \qquad t \in \mathbb{R} \text{ fest.}$$

Bestimmen Sie in Abhängigkeit des Parameters t den Definitionsbereich D von f. Wo ist die Funktion f stetig, monoton, umkehrbar?

43. Prüfen Sie folgende Aussagen auf ihre Richtigkeit:

   (a) Jede stetige Funktion auf $(0,1)$ nimmt ein Minimum und ein Maximum an.

   (b) Jede monotone Funktion auf $[0,1]$ nimmt ein Minimum und ein Maximum an.

   (c) Jede beschränkte und monotone Funktion auf $(0,1)$ ist stetig.

   (d) Jede stetige Funktion auf $[0,1]$ ist beschränkt.

44. Erklären Sie das Konzept des Differentialquotienten anhand einer aussagekräftigen und gut erklärten Skizze. Bestimmen Sie für $x > 0$ mit Hilfe des Differenzenquotienten die Ableitungen an der Stelle a von

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad g(x) = \sqrt{x}.$$

45. Untersuchen Sie durch Berechnung der einseitigen Differentialquotienten, ob

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 31 & \ldots \quad x \leq 13 \\ \sqrt{5x-1} & \ldots \quad x > 13 \end{cases}$$

im Punkt $(13, 8)$ eine Tangente besitzt. Ist $f(x)$ an der Stelle $x = 13$ stetig?

46. Prüfen Sie folgende Aussagen auf ihre Richtigkeit:

   (a) Jede monotone, stetige Funktion ist differenzierbar.

   (b) Jede differenzierbare Funktion ist stetig.

   (c) Die Ableitung einer monoton steigenden, differenzierbaren Funktion ist positiv.

   (d) Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion auf $(0,1)$ ist beschränkt.

47. Berechnen Sie die Ableitungen von

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)}\right), \qquad g(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^4 + x^3 - x^2 + x - 2}.$$

48. Linearisieren Sie die folgenden Funktionen für kleine Werte von x:

$$f(x) = \frac{2-x}{3+x}, \qquad g(x) = \sin(\cos(x)), \qquad h(x) = \sqrt[3]{x}.$$